ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (В.Г.Ушаков) Найти $(5n+2)$-ую цифру после запятой в десятичной записи числа $\sin 10^{-n}$.

2. (И.А.Шейпак) а) Вычислить интеграл $\int_0^1 K^2(x)\,dx$, где $K(x)$ — канторовская "лестница". б) Доказать, что все интегралы $\int_0^1 K^n(x)\,dx$, $n=1,2,\ldots,$ — рациональные числа.

3. (А.Ю. Попов) Даны $n\in\mathbb{N}$, $f\in C^n[0,1]$, $x_0\in[0,1]$, $f(x_0)=0$. Доказать, что для функции $f_0(x)=f(x)/(x-x_0)$ при любом $k=1,2,\ldots,n$ имеет место неравенство

$$\|f_0^{(k-1)}\|\leqslant\frac{\|f^{(k)}\|}{k},$$

где $\|\varphi\|=\max\{|\varphi(x)|:x\in[0,1]\}$.

4. (П.А. Бородин) Привести пример измеримой функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, на любом интервале принимающей все действительные значения.

5. (В.К. Белошапка) Существует ли степенной ряд $\sum a_{nm}x^ny^m$, абсолютно сходящийся на множестве $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leqslant 4, |xy|\leqslant 1\}$ и абсолютно расходящийся вне этого множества?

6. (В.В. Галатенко) Пусть A — множество на плоскости, имеющее положительную плоскую меру Лебега. Доказать, что существует правильный 2008-угольник с вершинами в A.

7. (Т.П. Лукашенко) Доказать, что для любого натурального n число

$$4^n\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}$$

является целым, и найти это число.

8. (В.И.Богачев) Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положительна и бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой. Известно, что функции f, f', f'', f''' абсолютно интегрируемы по Риману в несобственном смысле на $\mathbb{R}$. Доказать, что функция $(f')^2/f$ интегрируема на $\mathbb{R}$.

9. (О.Н.Косухин) Действительные числа $a_0,a_1,\ldots,a_n$ таковы, что для любого $x\in[-1,1]$ справедливо неравенство $|a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0|\leqslant 1$. Доказать, что тогда для любого $x\in[-1,1]$ справедливо неравенство $|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|\leqslant 2^{n-1}$.