ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (П.А.Бородин) Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами удовлетворяет неравенству $P(x) \geqslant P'(x)/1000$ при каждом $x \in \mathbb{R}$. Сколько действительных нулей может иметь этот многочлен?

2. (Т.П.Лукашенко) Для каждого $\theta \in [0;1]$ и $n \in \mathbb{N}$ описать все такие n раз дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любых точек x и x_0 выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}(x-x_0)(x_0+\theta(x-x_0))^{n-1}.$$

3. (В.В.Галатенко) Найти infimum множества значений параметра α, при каждом из которых ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^\alpha \sin nx}{n}$$

сходится равномерно при $x \in (0,1)$.

4. (В.В.Рыжиков) Во множестве с конечной мерой μ даны 2009 последовательностей подмножеств A_j^r, $r = 1, \ldots, 2009$, $j = 1, 2, \ldots$. Для каждого r и j справедливо равенство $\mu(A_j^r) = 1/\sqrt[2009]{j}$. Доказать, что найдутся такие различные j и k, что $\mu(A_j^r \cap A_k^r) > 0$ для любого $r = 1, 2, \ldots, 2009$.

5. (В.И.Богачев) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \sqrt{n}$?

6. (П.А.Бородин) Существуют ли такие функции $f, g, h \in C[0,1]$, что $\|\alpha f + \beta g + \gamma h\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ для любых чисел α, β, γ (здесь $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$))?

7. (И.А.Шейпак) Вычислить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \right)^2 .$$

8. (П.А.Бородин) Существует ли такое непустое замкнутое множество M в пространстве $C[0,1]$ с равномерной метрикой, что для любой функции $f \in C[0,1] \setminus M$ в M нет функции, ближайшей к f?

9. (В.И.Богачев) Для любой ли измеримой по Лебегу функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ найдется такая измеримая по Борелю функция $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, что $f(x) \leqslant g(x)$ для любого $x \in [0,1]$?