ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (В.К. Белошапка) Найти все функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для которых при любых действительных x и y выполнено равенство $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$.

2. (П.А. Бородин) Существует ли ненулевая функция f, непрерывная на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющая неравенствам
$$\int_0^x f(t)\,dt \geqslant 0, \int_0^x tf(t)\,dt \leqslant 0$$
при каждом $x \in [0,1]$?

3. (И.А. Шейпак) Найти главный член асимптотики интеграла
$$\int_0^1 \ln x \sin ax\,dx$$
при $a \to +\infty$.

4. (П.А. Бородин) Пусть Γ — график функции f, определенной и непрерывной на отрезке действительной оси. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать точки $A_1, \ldots, A_n$ на Γ, что A_1 и A_n — соответственно самая левая и самая правая точки Γ и
$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k A_{k+1}|^2 < \varepsilon.$$

5. (В.В. Рыжиков) Отображение $T : [0,1] \to [0,1]$ *сохраняет меру*, если $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset [0,1]$ (μ — классическая мера Лебега). Сохраняющее меру отображение T называется *эргодическим*, если оно не имеет инвариантных множеств A с мерой $\mu(A) \in (0,1)$. Например, отображение $x \to x + \alpha \,(\mathrm{mod}\,1)$ при иррациональном α является эргодическим. Существует ли такое сохраняющее меру отображение T, что $T \circ T$ не эргодично, но $T \circ T \circ T$ эргодично?