ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (П.А. Бородин) Второкурсник Игорь и первокурсница Аня играют в такую игру: вначале Игорь вырезает из отрезка $[0,1]$ интервал длины $1/2$, затем из оставшихся двух отрезков Аня вырезает интервал длины $1/4$, затем из оставшихся трех отрезков Игорь вырезает интервал длины $1/8$, и т.д. Проигрывает тот, кто не может вырезать свой очередной интервал. Кто выиграет при правильной игре?

2. (В.К.Белошапка) Пусть отображение $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ имеет вид $f(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, где P и Q — многочлены вида $c(a(x)+b(y))$ (a,b,c — многочлены от одной переменной). Докажите, что если якобиан (определитель матрицы первых частных производных) отображения f в каждой точке равен 1, то f — инъекция.

3. (П.А.Бородин) Пусть $f(x)$ — гладкая выпуклая вниз функция на прямой с единственным минимумом в нуле, и для всякого a сумма $f(x)+f(x-a)$ достигает минимума в точке, в которой $f(x)=f(x-a)$. Верно ли, что функция f четная?

4. (В.В.Рыжиков) Последовательность функций $f_n:[0,1]\to[0,1]$ обладает свойством

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = a > 0, \qquad n=1,2,\dots .$$

Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие два различных номера j и k, что

$$\int_0^1 f_j(t)f_k(t)\,dt > (1-\varepsilon)a^2.$$

5. (Ф.А. Ивлев) Пусть $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ — возрастающая функция, причем функция $f(x)/x$ не ограничена на $[1,\infty)$. Докажите, что найдется последовательность $a_1<a_2<\dots$ положительных чисел со свойствами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{f(a_k)}<\infty.$$