ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (В.В. Галатенко) Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок числовой прямой. Найдите все такие функции f, непрерывные на $[a, b]$, что равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

выполнено для всякой функции g, непрерывной на $[a, b]$.

2. (В.И. Богачев) Докажите, что для всякого $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$\pi x(1-x) < \sin \pi x \leqslant 4x(1-x).$$

3. (И.А. Шейпак) Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arcctg} a_{2n},$$

где $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$ — последовательность Фибоначчи ($a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$).

4. (П.А. Бородин, В.В. Лебедев) Существует ли функция f, непрерывная на отрезке а) $\Delta = [0, 1]$; б) $\Delta = [1, 2]$, для которой значение интеграла

$$\int_{\Delta} f(t) \cos \lambda t\,dt$$

положительно при всяком $\lambda \in \mathbb{R}$?

5. (П.А. Бородин) Рассматриваются все многочлены $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ комплексного переменного z с комплексными коэффициентами a_k и произвольной степенью n, удовлетворяющие неравенству $|P(z)| \leqslant 1$ при всяком z с $|z| = 1$. Может ли у таких многочленов быть сколь угодно большой сумма а) $|a_n|^2 + \ldots + |a_0|^2$; б) $|a_n| + \ldots + |a_0|$?