

**ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ**

*кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа*

1. (А.В. Бегунц, Д.В. Горяшин) Рассмотрим числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2a_n.$$

- а) Может ли первый из этих рядов сходиться, а второй расходиться?
б) Может ли второй из этих рядов сходиться, а первый расходиться?

2. (В.В. Галатенко) По числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ построена последовательность взвешенных средних

$$c_n = \theta a_n + (1 - \theta)a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

($\theta \in [0, 1]$ — фиксированное число). Для каких значений θ из сходимости последовательности c_n следует сходимость исходной последовательности a_n ?

3. (В.В. Рыжиков) Существует ли такая последовательность измеримых множеств $A_n \subset [0, 1]$, что

$$\int_{A_n} f(x) dx \rightarrow \int_0^1 x f(x) dx$$

для всякой функции f , непрерывной на отрезке $[0, 1]$?

4. (И.А. Шейпак) В плоской области между осями x и y и положительной ветвью гиперболы $y = 1/x$ имеется точечный источник света. Исходящие из него лучи света отражаются от оси x и гиперболы как от зеркал (от оси y лучи не отражаются). Доказать, что освещенной является лишь ограниченная подобласть указанной области.¹

¹Жюри не известно, останется ли справедливым утверждение задачи в случае, если допустить отражение лучей еще и от оси y .