

**ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ**

*кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа*

1. (А.В. Бегунц) Определим последовательность $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$). Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

2. (Д.В. Горяшин) Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x^2 + e^{2017\pi}} dx.$$

3. (В.К. Белошапка) Существуют ли непостоянные бесконечно дифференцируемые функции a и b , определенные на некотором интервале, для которых выполнено тождество

$$a^2(x) + a(x)b(y) \equiv a^2(y) + a(y)b(x)?$$

4. (В.И. Богачев, П.А. Бородин) Существует ли такая непрерывная функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для всякого отрезка $[a, b]$ и всякой функции $f \in C[a, b]$ выполнено неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)g(x)|?$$

5. (А.П. Солодов) Доказать, что

$$(\sqrt{1+x} + 1)^{2n} = p_n(x) + O(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0),$$

где p_n — многочлен степени n .