ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (А.В. Бегунц) Симметричен ли график функции $y = \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ относительно прямой $y = x$?

2. (В.И. Богачев) Пусть непрерывные на отрезке $[0,1]$ функции f, g таковы, что $g([0,1]) \subset [0,1]$ и f убывает. Докажите неравенство

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_0^a f(x)\,dx,$$

где $a = \int_0^1 g(x)\,dx$.

3. (К.С. Рютин) Докажите, что интеграл

$$\int_x^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos x - \cos t}}\,dt$$

не зависит от $x \in [0,\pi)$, и найдите его значение.

4. (П.А. Бородин) Пусть m_1 и m_2 – соответственно линейная и плоская меры Лебега, и борелевское отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таково, что для всякого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ выполнено равенство $m_2(f^{-1}(A)) = m_1(A)$.
а) Докажите, что для всякой точки $a \in \mathbb{R}^2$ найдется такая точка $b \in \mathbb{R}^2$, что $|a-b| \leqslant 1$ и $|f(a) - f(b)| > 3/2$.
б) Можно ли в этом утверждении $3/2$ заменить на 2?

5. (Д.В. Горяшин) Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — занумерованное по возрастанию модулей множество комплексных чисел

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \in \operatorname{Arg} z, |\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|\}.$$

Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n$.