Задачи 1—2

12 сентября 2012 г.

Язык теории множеств

1. Приведите пример непустого множества, каждый элемент которого является некоторым подмножеством этого множества.

2. Для каждого целого $n > 0$ постройте множество $_n$, состоящее ровно из n элементов, такое, что для любых $\in {}_n$, $' \in {}_n$ либо $\in {}'$, либо $' \in$.

3. Докажите, что для любого множества A выполняются следующие свойства:

   (a) $A \cap A = A$,

   (b) $A \cup A = A$,

   (c) $A \cup \emptyset = A$,

   (d) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4. Докажите, что для любых множеств A и B включение $A \subset B$ выполняется тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$ или когда $A \cup B = B$.

5. Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, и $A \cup B = B$.

6. Докажите, что для подмножеств $A, B \subset X$ включение $A \subset B$ эквивалентно включению $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.

7. Для любых двух множеств A и B имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A).$$

8. Для любых двух множеств A и B имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

9. Для любых двух множеств A и B условие $A \subset B$ эквивалентно условию $A \setminus B = \emptyset$.

10. Докажите, что $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

11. Докажите, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

12. Обозначим через $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Докажите, что

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

13. Доказать, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то и множества A иB равномощны.

14. Пусть мощность конечного множества A равна n. Какова мощность множества 2^A всех его подмножеств (включая само множество A и пустое множество)?

15. Доказать, что множество X конечно в том и только в том случае, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству.

16. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

17. Доказать, что в каждом бесконечном множестве существует бесконечное счетное подмножество.

18. Доказать, что Каждое бесконечное счетное множество можно представить как несвязное объединение двух непересекающихся бесконечных (тоже счетных) подмножеств.

19. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

20. Доказать, что если и — счетные множества, то их объединение $A \cup$ — счетное множество.

21. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.

22. Доказать, что если множества X и Y счетны, то декартово произведение $X \times Y$ тоже счетно.

23. Доказать, что множество многочленов с рациональными коэффициентами не более чем счетно.

24. Доказать, что множество алгебраических чисел не более чем счетно.

25. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ сюръективно, а множество X счетно, то Y не более чем счетно.

26. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ инъективно, а множество Y счетно, то X не более чем счетно.

27. Показать, что если множество X счетно, то множество всех конечных подмножеств в X тоже счетно.

28. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.

29. Доказать, что если X — несчетное множество, а A — его счетное подмножество, то $\#(X \setminus A) = \#(X)$.

30. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассыпаны "кнопки"без пересечений, т.е. такие подмножества, каждое из которых состоит из объединения трех отрезков с общим началом. Доказать, что семейство таких "кнопок"не более чем счетно.

31. Показать, что множество иррациональных чисел несчетно.

32. Показать, что множество трансцендентных чисел несчетно.

Топологические пространства

33. Пусть X — бесконечное множество и $\mathcal{T} = \{ \subset : \setminus$ конечно или $A = \emptyset\}$. Докажите, что $\mathcal{T}$ является топологией на X.

34. Показать, что на бесконечном полуинтервале $X = (0, +\infty)$ семейство подмножеств $\{\emptyset, (a, +\infty), 0 \leq a < +\infty\}$ образует некоторую топологию.

35. Показать, что полуинтервал $[a, b) \subset \mathbf{R}$ представим как объединение замкнутых подмножеств и как пересечение открытых подмножеств не вещественной прямой $\mathbf{R}$.

36. Показать что множество $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто на вещественной прямой $\mathbf{R}$.

37. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в $\mathbf{N}$.

38. Показать, что если множество U открыто, а множество F замкнуто, то $U \setminus F$ открыто, а $F \setminus U$ замкнуто.

39. Докажите, что для любых двух непересекающихся открытых множеств замыкание любого из них не пересекается с другим.

40. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

41. Докажите, что если множества U и V открыты и не пересекаются, то $\mathbf{Int}\ (\overline{U}) \cap \mathbf{Int}\ (\overline{V}) = \emptyset$.

42. Приведите пример пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются).

43. Докажите, что, если каждая отдельная точка является замкнутым множеством, то каждое множество является пересечением некоторого семейства открытых множеств.

44. На вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ построить три попарно различных открытых множества, имеющих общую границу

45. Докажите, что если в топологическом пространстве X нет других плотных подмножеств кроме самого X, то пространство X дискретно.

46. Приведите пример топологического пространства, в котором имеется одноточечное плотное подмножество, а само пространство состоит более чем из одной точки.

47. Верно ли, что объединение плотных подмножеств плотно?

48. Верно ли, что пересечение плотных подмножеств плотно?

49. Покажите, что пересечение двух (конечного семейства) плотных открытых подмножеств плотно.

50. Докажите, что пересечение счетного семейства плотных открытых подмножеств на вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ плотно.

Метрические пространства

51. Пусть $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ – окружность в комплексной плоскости с метрикой $\rho(z; w) = |z - w|$. Доказать, что $\mathbf{S}^1, \rho$ является метрическим пространством.

52. Пусть $C[0,1]$ – пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Доказать, что функция

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$

задает метрику на пространстве $C[0,1]$.

53. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$ тоже является метрикой.

54. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ тоже является метрикой.

55. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Является ли метрикой функция $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$?

56. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

57. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1\}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

58. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = f(\rho_1)$ тоже является метрикой, если f – монотонно неубывающая функция. причем $f(0) = 0$ и $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

59. Обобщить предыдущую задачу на случай двух метрик: Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = f(\rho_1, \rho_2)$ тоже является метрикой, если функция f – является монотонно неубывающая функцией относительно пары переменных, причем $f(0,0) = 0$ и $f(x+y, u+v) \leq f(x,u) + f(y,v)$.

60. Приведите пример такого метрического пространства, в котором имеется два шара, причем шар с большим радиусом содержится в шаре с меньшим радиусом. Покажите, что в этом случае больший радиус не превышает удвоенного меньшего радиуса.

61. Покажите, что отрезок $[a,b]$ в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ задается условием
$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(a,x) + \rho(x,b) = \rho(a,b).$$

 Описать аналогичные "отрезки"в метрике ρ_p.

62. Показать, что все метрики ρ_p в пространстве $\mathbf{R}^n$ задают одну и ту же топологию.

63. Показать, что в пространстве непрерывных функций на отрезке $C[0,1]$ две метрики, задаваемые формулами
$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt,$$

$$\rho_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt},$$
 задают неэквивалентные топологии.

Вещественная прямая

64. Пусть $G \subset \mathbf{R}^1$ — открытое множество на на вещественной прямой. Доказать, что G есть объединение непересекающихся интервалов.

65. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$$\rho(x,y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

66. Докажите, что следующая функция есть метрика:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

67. Показать, что в эвклидовом пространстве функция

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает некоторую метрику.

68. Показать, что в эвклидовом пространстве имеет место предел

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_i |x_i - y_i|.$$