# Задачи 4

17 сентября 2012 г.

## 1 Гомеоморфизмы

### Определение

### Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

92. Привести пример двух гомеоморфных пространств $X$ и $Y$ и биекции $f : X \longrightarrow Y$, которая не является гомеоморфизмом.

    **Решение.**

    Несвязное объединение полуинтервалов, скажем $[0,1) \sqcup [2,3)$ допускает биекцию на один полуинтервал $[0,1)$ . Значит нужно добавить счетное несвязное объединение полуинтервалов к обеим пространствам, чтобы они стали гомеоморфными.

    $\blacksquare$

93. Пусть $K$ – канторово совершенное множество. Доказать, что пространство $K \times K$ гомеоморфно $K$.

94. Привести пример двух метрических пространств $X$ и $Y$ и таких отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ , что $f$ и $g$ взаимно однозначны и непрерывны, и, тем не менее, пространства $X$ и $Y$ не гомеоморфны. (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.14).

    **Решение.** $\blacksquare$

95. Докажите, что $[0;1)$, $[a;b)$, $(0;1]$ $(a;b]$ гомеоморфны для любых $a < b$.

96. Докажите, что $[0;1)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;a]$ гомеоморфны для любых $a$.

97. Докажите, что $(0;1)$ и $(a;b)$ гомеоморфны для любых $-\infty \le a < b \le \infty$.

98. Показать, что всякая изометрия есть гомеоморфизм.

99. Показать, что всякая сюръективная строго монотонная функция $f : [a;b] \longrightarrow [c;d]$ является гомеоморфизмом.

100. Показать, что всякое невырожденное аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ есть гомеоморфизм.

101. Докажите, что инверсия
$$f(x) = \frac{x}{|x|^2}, \quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
есть гомеоморфизм.

102. Пусть $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}\, z > 0\}$ верхняя полуплоскость комплексных чисел. Показать, что отображение $f : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^+$,
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$
является гомеоморфизмом, если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$.

103. Докажите, что если биекция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ является монотонной функцией, то она есть гомеоморфизм.

104. Пусть $\mathbf{S}^1$ – окружность и $s_0 \in \mathbf{S}^1$ –точка на окружности. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^1 \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

105. Показать, что график непрерывной функции, заданной на некотором промежутке, гомеоморфен этому промежутку.

106. Пусть $\mathbf{S}^n$ – $n$–мерная сфера и $s_0 \in \mathbf{S}^n$ –точка на сфере. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^n \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

107. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.
    (a) вся плоскость $\mathbb{R}^2$ ;
    (b) открытый квадрат;
    (c) открытая полуплоскость $\mathbb{C}^+$;
    (d) открытый круг;
    (e) открытый прямоугольник;
    (f) открытый квадрант;
    (g) открытый угол;
    (h) открытый полукруг;
    (i) открытый сектор;
    (j) плоскость с вырезанным лучом $\{y = 0, x \geq 0\}$;

108. Докажите, что окружность $\mathbf{S}^1$ гомеоморфна границе квадрата $\partial \mathbf{I}^2$.

109. Докажите, что замкнутый круг $\mathbf{D}^2$ гомеоморфен квадрату $\mathbf{I}^2$.

110. Докажите, что открытый круг $\mathbf{Int}\ \mathbf{D}^2$ гомеоморфен открытому квадрату $\mathbf{Int}\ \mathbf{I}^2$.

111. Докажите, что всякая замкнутая ломаная в $\mathbb{R}^2$ без самопересечений гомеоморфна окружности $\mathbf{S}^1$.

112.

113. Докажите, что всякая незамкнутая ломаная в $\mathbb{R}^2$ без самопересечений гомеоморфна отрезку $[0,1]$.

114. Докажите, что подпространство $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1, |y| > 1\}$ гомеоморфно квадрату без вершин, $\mathbf{I}^2 \setminus \{(+1,+1),(+1,-1),(-1,+1),(-1,-1),\}$.

115. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

   (a) Полуплоскость $\{x \geq 0\}$;
   (b) квадрант $\{x, y \geq 0\}$;
   (c) угол $\{x \geq y \geq 0\}$;
   (d) полуоткрытая полоса $\{(x,y) : y \in [0,1)\}$;
   (e) квадрат без трёх сторон (и всех вершин) $\{(x,y) : 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
   (f) квадрат без двух смежных сторон (и трех вершин) $\{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
   (g) квадрат без стороны (и двух вершин) $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$;
   (h) квадрат без одной вершины $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\, xy < 1\}$;
   (i) круг без одной граничной точки $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y < 1\}$;
   (j) полукруг без диаметра $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$
   (k) круг без радиуса;

116. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

   (a) плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$;
   (b) открытый круг без точки $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
   (c) кольцо $\{(x,y) : a < x^2 + y^2 < b\}$;
   (d) плоскость без круга $\{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\}$;
   (e) плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{I}^2$
   (f) плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \setminus [0,1]$
   (g) дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где $X$ есть объединение нескольких отрезков с общим концом;
   (h) дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где $X$ есть незамкнутая конечнозвенная ломаная без самопересечений;

117. Докажите, что если $K$ и $L$ — конечные множества точек плоскости, состоящие из одинакового числа точек, то их дополнения гомеоморфны.