Задачи 5

1 октября 2012 г.

1 Метрики

118. Пространство l_p с метрикой
$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
является полным метрическим пространством.

119. Существует ли изометрия эвклидова пространства на свою собственную часть?

120. Существует ли изометрия конечного метрического пространства в некоторое эвклидово пространство?

Сжимающие отображения

Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если существует вещественная постоянная $\lambda < l$, такая, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda\rho(x,y)$ для любых двух точек $x, y \in X$.

121. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства непрерывно. (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.9).

122. Доказать, что любое сжимающее отображения полного метрического пространства в себя всегда имеет неподвижную точку, причем эта точка единственна.(Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.10).

123. Привести пример, показывающий, что от условия полноты метрического пространства в предыдущей задаче отказаться нельзя.(Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.11).

2 Расстояния между подмножествами

124. Верно ли, что расстояние между двумя непересекающимися, замкнутыми подмножествами на плоскости (на прямой) всегда больше 0? (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.7).

Расстояние от точки до подмножества

125. Показать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{A}$.

126. Докажите, что для любого множества A и точек x, y выполнено неравенство $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$.

Расстояние Хаусдорфа

127. Доказать, что метрика Хаусдорфа определяет метрику в пространстве всех ограниченных замкнутых подмножеств некоторого метрического пространства.

3 Аксиомы отделимости

128. Доказать, что метрическое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа (T_2).

129. Пусть X — метрическое пространство. Доказать, что каждое одноточечное множество замкнуто. (Взято из [?], стр. 91, задача 13.5).

130. Является ли отрезок $[0; 1]$ с индуцированной из $\mathbb{R}$ топологией хаусдорфовым? Обладают ли в нём непересекающимися окрестностями точки 0 и 1? Какими?

131. Пространство X является хаусдорфовым, тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ имеет место равенство $\{x\} = \bigcap\limits_{U \ni x} \overline{U}$.

132. Показать, что в хаусдорфовом пространстве сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

133. Показать, что множество совпадения двух непрерывных отображений произвольного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

134. Показать, что множество неподвижных точек непрерывного отображения хаусдорфова пространства в себя является замкнутым.

135. Показать, что любое подпространство хаусдорфова пространства тоже хаусдорфово.

136. Показать, что аксиома отделимости T_1 выполняется тогда и только тогда, когда любое одноточечное подмножество замкнуто.

137. Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости T_1, тогда и только тогда, когда любая его точка совпадает с пересечением всех своих окрестностей.

138. Показать, что из хаусдорфовости следует T_1. Приведите пример, когда из T_1 не следует хаусдорфовость.

139. Показать, что первая аксиома отделимости наследственна.

140. В каждом множестве существует самая слабая топология, удовлетворяющая первой аксиоме отделимости. Какова она?

141. Всякое нормальное пространство регулярно (и, значит, хаусдорфово).

142. Пространство нормально, тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет второй и четвёртой аксиомам отделимости.

143. Докажите, что всякое замкнутое подпространство нормального пространства нормально.

144. Постройте два замкнутых непересекающихся подмножества некоторого метрического пространства, расстояние между которыми равно нулю.

145. Пусть X — пространство, удовлетворяющее аксиоме T_4, пусть F_1, F_2 и F_3 его замкнутые подмножества с пустым пересечением, т.е. $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$. Доказать, что найдутся такие окрестности $U_i \supset F_i, \quad i = 1, 2, 3,$ что $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$.

Лемма Урысона, теорема Титце, разбиение единицы

146. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f, такая, что $K = f^{-1}(0)$. (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.12).

147. Выведите лемму Урысона из теоремы Титце.

3.0.1 Вторая аксиома счетности

148. Постройте метрическое пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счётности.

149. Докажите, что в сепарабельном пространстве всякая совокупность попарно непересекающихся открытых множеств счётна.

150. Докажите, что непрерывный образ сепарабельного пространства сепарабелен.

151. Докажите теорему Линделёфа: если пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить счётный набор множеств, также являющийся покрытием.

152. Показать, что у метрического пространства следующие условия эквивалентны:

    (a) Пространство сепарабельно;
    (b) Пространство имеет счетную базу;
    (c) Пространство финально компактно

Первая аксиома счетности.

153. Доказать, что всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности.

154. Доказать, что из второй аксиомы счётности следует первая.