Задачи 8

24 октября 2012 г.

Гомотопии

198. Докажите, что для любого топологического пространства X множество $\pi(X, \mathbb{I})$ состоит из одного элемента.

199. Докажите, что два постоянных отображения гомотопны, тогда и только тогда, когда их образы лежат в одной компоненте линейной связности пространства Y .

200. Докажите, что число элементов множества $\pi(\mathbb{I}, Y)$ совпадает с числом компонент линейной связности пространства Y.

201. Любые два непрерывных отображения $f, g : \longrightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопны.

202. Показать, что для непрерывных отображений $f, g : \longrightarrow \mathbb{R}^n$ формула $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ задает гомотопию между отображениями f и g.

203. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ непрерывное отображение. Доказать, что если два отображения $g_0, g_1 : Z \longrightarrow X$ гомотопны, то гомотопны композиции
$$f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \longrightarrow Y.$$

204. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ непрерывное отображение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Доказать, что два отображения $g_0, g_1 : Z \longrightarrow X$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны композиции
$$f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \longrightarrow Y.$$

205. Показать, что всякое выпуклое подмножество евклидова пространства линейно связно.

206. Показать, что два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ гомотопны.

207. Показать, что образ пути является линейно связным множеством.

208. Докажите, что если множества A и B оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то A и B тоже линейно связны.

209. Докажите, что всякое непрерывное отображение в звёздное множество гомотопно постоянному отображению, образом которого является центр звезды.

210. Докажите, что любые два непрерывных отображения в звёздное множество гомотопны.

211. Докажите, что всякое непрерывное отображение звездного множества в произвольное пространство гомотопно постоянному отображению.

212. Докажите, что два любых отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n > 1$, гомотопны.

213. Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

214. Вычислите, при различных значениях m, n и k, число гомотопических классов отображений

$$\{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$

считая, что топология в множестве $\{1, 2, \dots, m\}$ дискретна.

215. Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в сферу $\mathbb{S}^n$ гомотопно постоянному отображению.

216. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в сферу радиуса 1 удовлетворяют неравенству

$$|f(x) - g(x)) < 2.$$

Доказать, что отображения f и g гомотопны.

217. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n \subset \{0\}$ удовлетворяют неравенству

$$|f(x) - g(x)) < |f(x)|.$$

Доказать, что отображения f и g гомотопны.