"Введение в топологию", конспект лекции 1.

А.С.Мищенко

5 сентября 2012 г.

Язык теории множеств

План

Множество. Подмножество. Пустое множество. Одноэлементное множество.
Теоретико множественные операции. Объединение. Пересечение. Разность. Непересекающиеся множества.
Соотношения операций с множествами. Коммутативность. Ассоциативность. Дистрибутивность пересечения относительно объединения. Дистрибутивность объединения относительно пересечения. Двойственность объединения и пересечения (законы де Моргана).
Отображения множеств. Область определения отображения. Область значений отображения. Тождественное отображение. Образ подмножества. Прообраз подмножества. Прообраз элемента.
Композиция отображений. Инъективное отображение. Сюръективное отображение. Взаимно однозначное отображение. Обратное отображение.
Мощность множества. Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна о равномощных множествах.
Сужения отображений.
Конструкции множеств. Несвязное объединение. Категорное свойство универсальности. Декартово произведение. Координаты декартова произведения. Декартово произведения семейства множеств. Векторное пространство $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение. График отображения. Фактор множество.
Упорядоченные множества. Частично упорядоченное множество. Линейно упорядоченное множество. Направленное множество. Направленность. Последовательность элементов. Частичный порядок на арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$. Конфинальность. Поднаправленность. Подпоследовательность.
Прямой и обратный пределы. Прямой и обратный спектры множеств.
Вполне упорядоченные множества. Теорема Цермело о полной упорядоченности любого множества. Терема Кантора о множестве всех подмножеств. Конечные, счетные и несчетные множества. Кардинальные и порядковые числа.

Множества

Множество или *совокупность* или *семейство* представляет собой неопределимое понятие в математике, на котором базируется большая часть математических теорий. Все три термина множество, совокупность, семейство мы будем понимать как синонимы. Множество должно состоять из элементов произвольной природы. Всякий элемент x данного множества X принадлежит множеству X, что записывается в виде $x \in X$. Если элемент x не принадлежит множеству X, то мы пишем $x \notin X$.

Что не впасть в логическое противоречие, мы будем считать, в частности, что само множество X не является элементом самого себя, $X \notin X$.

Всякое множество X будет задаваться или определятся при помощи эффективно описываемого свойства его элементов $R(x)$. Записываться это определение будет следующим образом

$$X = \{x : R(x)\},$$

что означает, что множество X состоит из всех элементов x, для которых справедливо свойство $R(x)$.

Другим ограничением на использование различных множеств в математической теории служит предположение, что всякое множество, которое используется в конкретной математической теории, является подмножеством в одном и том же достаточно обширном множестве. Такое наивное предположение обезопасит нас от различных логических противоречий при рассмотрении объектов в теории множеств.

Пусть задано два множества X и Y. Множество Y называется подмножеством множества X, что записывается формулой $Y \subset X$, если выполнено условие

$$\forall x : (x \in Y \Rightarrow x \in X)\,.$$

Если $Y \subset X$ и $Z \subset Y$, то $Z \subset X$, а также $X \subset X$. Каждый элемент x формирует одноэлементное множество $\{x\}$, что можно описать формально следующим образом

$$y \in \{x\} \Leftrightarrow y = x.$$

другими словами если $x \in X$ — элемент множества X, то одноэлементное множество $\{x\}$ является подмножеством множества X, $\{x\} \subset X$.

Теоретико множественные операции

Рассмотрим некоторые подмножества одного и того же множества X, обозначим все эти подмножества одной и той же буквой с некоторым индексом $\alpha \in A$ из некоторого другого множества индексов A. Таким образом, имеем семейство подмножеств

$$\mathcal{Y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}.$$

Семейство подмножеств $\mathcal{Y}$ тоже является множеством.

Объединением семейства $\mathcal{Y}$ называется подмножество $Y \subset X$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из подмножеств Y_α нашего семейства $\mathcal{Y}$. Записываем

$$Y = \bigcup \mathcal{Y} = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha = \{y \in X : \exists \alpha \in A : (y \in Y_\alpha)\}.$$

Пересечением семейства $\mathcal{Y}$ называется подмножество $Z \subset X$, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из подмножеств Y_α нашего семейства $\mathcal{Y}$. Записываем

$$Y = \bigcap \mathcal{Y} = \bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha = \{y \in X : \forall \alpha \in A : (y \in Y_\alpha)\}.$$

Если наше семейство небольшое, скажем, занумерованное натуральными числами,

$$\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\},$$

то объединение и пересечение записывают привычным образом:

$$\bigcup \mathcal{Y} = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n,$$

$$\bigcap \mathcal{Y} = \bigcap_{k=1}^{n} Y_k = Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_n,$$

В частности, для двух подмножеств $Y, Z \subset X$ для объединения пишем $Y \cup Z$, а для пересечения пишем $Y \cap Z$.

Разностью двух множеств Y и Z называется множество $Y \setminus Z$, состоящее из тех элементов множества Y, которые не принадлежат множеству Z:

$$Y \setminus Z = \{y \in Y : y \notin Z.\}$$

В частности, разность $X \setminus Y$ называется *дополнением* к подмножеству Y (во множестве X) Множество, не имеющее никаких элементов, называется *пустым* множеством и обозначается символом $\emptyset$. В частности

$$Y \setminus Y = \emptyset.$$

Если для двух подмножеств $Y, Z \subset X$ пересечение пусто, $Y \cap Z = \emptyset$, то говорят, что эти множества *не пересекаются.*

Замечания о пустом множестве $\emptyset$

Не смотря на то, что понятие пустого множества является достаточно бедным по своим свойствам, его использование в математике позволяет избегать многих оговорок при рассмотрении различных теоретико-множественных операций. Во-первых, заметим, что пустое множество $\emptyset$ следует считать подмножеством в любом другом множестве X; $\emptyset \subset X$. В самом деле, условие $\emptyset \subset X$ согласно определению означает

$$\forall x : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in X).$$

Отрицание этого утверждения заключается в утверждении, что

$$\exists x : (x \in \emptyset) \& (x \notin X)$$

и, разумеется, является ложным. Значит, предыдущее утверждение является истинным.

Две операции с множествами — объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ и пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ семейства $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ вполне корректны и в случае, когда семейство индексов A является пустым множеством, $A = \emptyset$. Следуя формальным правилам логики легко установить, что в случае пустого множества индексов $A = \emptyset$ имеют место равенства

$$\bigcup_{\alpha\in\emptyset} Y_\alpha = \emptyset, \quad \bigcap_{\alpha\in\emptyset} Y_\alpha = X.$$

Соотношения операций с множествами

Следующие соотношения легко проверяемы:

- Коммутативность:

$$Y \cup Z = Z \cup Y; \quad Y \cap Z = Z \cap Y.$$

- Ассоциативность:

$$(Y \cup Z) \cup U = Y \cup (Z \cup U), \quad (Y \cap Z) \cap U = Y \cap (Z \cap U).$$

- Дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$(Y \cup Z) \cap U = (Y \cap U) \cup (Z \cap U)$$

  или

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha\right) \cap U = \bigcup_{\alpha\in A} \left(Y_\alpha \cap U\right).$$

- Дистрибутивность объединения относительно пересечения :

$$(Y \cap Z) \cup U = (Y \cup U) \cap (Z \cup U)$$

  или

$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} Y_\alpha\right) \cup U = \bigcap_{\alpha\in A} \left(Y_\alpha \cup U\right).$$

- Двойственность объединения и пересечения (законы де Моргана):

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} \left(X \setminus Y_\alpha\right),$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in A} Y_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A} \left(X \setminus Y_\alpha\right),$$

  Эту двойственность можно сформулировать следующим образом: при переходе к дополнениям подмножеств операция объединения переходит в операцию пересечения, и, наоборот, операция пересечения переходит в операцию объединения.

1 Отображения множеств

Определение

Отображение или *однозначное отображение* f одного множества X в другое множество Y,

$$f : X \longrightarrow Y$$

мы понимаем как соответствие, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие однозначно определенный элемент $y = f(x) \in Y$. С этой точки зрения вещественно значная функция f от одной вещественной переменной есть ничто иное как (однозначное)отображение множества вещественных чисел $\mathbf{R}^1$ в себя, т.е. функция

$$f : \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^1$$

каждому значению переменной $x \in \mathbf{R}^1$ ставит в соответствие однозначно определенное другое число $y = f(x) \in \mathbf{R}^1$.

Множество X называется *областью определения* отображения f. Множество Y называется *областью значений* отображения f.

Тождественным отображением множества X называется отображение $\mathbf{Id}_X : X \longrightarrow X, \quad \mathbf{Id}_X(x) \equiv x, \quad x \in X.$

Образы и прообразы

Рассмотрим произвольное отображение множеств

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Пусть $A \subset X$ есть некоторое подмножество множества X. Через $f(A) \subset Y$ обозначим подмножество $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$ и назовем его *образом* подмножества A при отображении f. Другими словами, образ $f(A) \subset Y$ состоит из всех значений $f(x)$ отображения f, когда переменная x пробегает всевозможные значения из подмножества A.

Образ $f(A)$ иначе можно задать в виде равенства

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\}.$$

В частности, подмножество $f(X) \subset Y$ является образом всей области определения, и, таким образом, можно считать, что f отображает множество X в свой образ $f(X)$, но строго говоря, это уже другое отображение, скажем,

$$f' : X \longrightarrow f(X),$$

поскольку у него другая область значений, не Y, а всего лишь $f(X)$.

Пусть $B \subset Y$ есть некоторое подмножество множества Y. Через $f^{-1}(B) \subset X$ обозначим подмножество $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ и назовем его *прообразом* подмножества B при отображении f. *Прообраз элемента* $y \in Y$ —

это прообраз одноэлементного подмножества $\{x\} \subset Y$, $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$. Пробраз $f^{-1}(B)$ иначе можно задать в виде равенства

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Справедливы простые свойства образов и прообразов подмножеств:

1. $$f\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f(A_\alpha);$$

2. $$f\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha} f(A_\alpha);$$

3. $$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha);$$

4. $$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha);$$

5. $$A \subset f^{-1}(f(A));$$

6. $$B \cap f(X) = f\left(f^{-1}(B)\right).$$

В частности, прообразы различных точек не пересекаются,

$$f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset, \quad y_1 \neq y_2.$$

Композиции отображений. Обратимые отображения

Пусть задано два отображения множеств

$$f : X \longrightarrow Y, \quad g : Y \longrightarrow Z$$

Композицией отображений f и g называется отображение $g \cdot f : X \longrightarrow Z$, задаваемое формулой

$$(g \cdot f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \cdot f"] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}.$$

Если одно из этих отображений является тождественным, то композиция с ним другого отображения совпадает с последним:

$$f \cdot \mathbf{Id}_X = f;$$

$$\mathbf{Id}_Y \cdot f = f;$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathbf{Id}_X"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & Y \arrow[r, "\mathbf{Id}_Y"'] & Y \end{tikzcd}.$$

В частности, подмножество $f(X) \subset Y$ является образом всей области определения, и, таким образом, можно считать, что f отображает множество X в свой образ $f(X)$, но строго говоря, это уже другое отображение, скажем,

$$f' : X \longrightarrow f(X),$$

поскольку у него другая область значений, не Y, а всего лишь $f(X)$, а само отображение f представляется в виде композиции отображения f' и вложения $f(X) \hookrightarrow Y$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & f(X) \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}.$$

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *инъективным* или *инъекцией*, если различным элементам $x \neq y \in X$ отображение f сопоставляет различные значения $f(x) \neq f(y)$. На пример, можно считать, что подмножество $X \subset Y$ задает вложение множества X в множество Y, $i_X : X \hookrightarrow Y$, $i_X(x) \equiv x, \quad x \in X$, которое, очевидно, является инъекцией.

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *сюръективным* , или *сюръекцией* или *отображением на* , если каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$, $y = f(x)$.

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *взаимно однозначным* или *биективным* или *биекцией* , если оно одновременно является инъективным и сюръективным отображением.

Заметим, что инъективное отображение $f : X \longrightarrow Y$ является биекцией между множеством X и его образом $f(X) \subset Y$.

Поскольку биекция f является сюръекцией, то каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$, $y = f(x)$. Этот элемент x можно выбрать единственным образом в силу инъективности отображения f. В частности, это значит, что у взаимно однозначного отображения f имеется так называемое *обратное* отображение, $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, которое каждому элементу $y \in Y$ сопоставляет как раз тот (единственный) элемент $x \in X$, для которого выполняется равенство $y = f(x)$. Другими словами, значение $x = f^{-1}(y)$ удовлетворяет условию

$$f\left(f^{-1}(y)\right) \equiv y, \quad y \in Y.$$

Подставляя вместо y его значение $y = f(x)$, из этого тождества получается другое тождество
$$f\left(f^{-1}(f(x))\right) \equiv f(x), \quad x \in X.$$
Поскольку различным элементам отображение f сопоставляет различные элементы, то из предыдущего тождества следует, что

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \quad x \in X.$$

Следовательно, определение взаимно однозначного отображения $f : X \longrightarrow Y$ можно сформулировать следующим эквивалентным образом: Отображение f взаимно однозначно, если существует другое отображение $g : Y \longrightarrow X$ такое, что две возможных композиции отображений f и g являются тождественными отображениями:

$$f \cdot g = \mathbf{Id}Y,$$

$$g \cdot f = \mathbf{Id}_X,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Id}_X"] & Y \arrow[r, "g=f^{-1}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Id}_Y"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – некоторая инъекция. Тогда, очевидно, отображение $f' : X \longrightarrow f(X)$ на свой образ является биекцией.

Мощность множества

Взаимно однозначное отображение $f : X \longrightarrow Y$ называют также *взаимно однозначным соответствием* между множеством X и множеством Y. При этом множества X и Y называются *количественно эквивалентными* или *равномощными* множествами. По другому будем говорить, что множества X и Y имеют одинаковую *мощность*, и писать

$$\#(X) = \#(Y).$$

С точки зрения абстрактной теории множеств равномощные множества можно не различать и при необходимости одно множество заменять на другое ему равномощное.

Очевидно, что если два множества X и Y количественно эквивалентны одному и тому же третьему множеству Z, то они количественно эквивалентны между собой, т.е. из двух равенств $\#(X) = \#(Z)$ и $\#(Y) = \#(Z)$ вытекает третье равенство $\#(X) = \#(Y)$.

Для двух множеств X и Y если существует инъекция $f : X \longrightarrow Y$, то пишем
$$\#(X) \leq \#(Y).$$

Ясно, что из неравенств $\#(X) \le \#(Y)$ и $\#(Y) \le \#(Z)$ следует, что

$$\#(X) \le \#(Z).$$

Если же выполнены два неравенства $\#(X) \le \#(Y)$ и $\#(Y) \le \#(X)$, то тогда

$$\#(X) = \#(Y).$$

Это утверждение известно как теорема Кантора-Бернштейна:

Теорема 1 (Кантор–Бернштейн) *Если из двух множеств X и Y каждое количественно эквивалентно подмножеству в другом, то эти два множества равномощны.*

Доказательство. Условие теоремы заключается в существовании двух биекций

$$f : X \longrightarrow Y_1 \subset Y; \quad g : Y \longrightarrow X_1 \subset X.$$

Положим

$$\begin{array}{lcl}
X_2 = g \cdot f(X) & \subset & X_1, \\
X_3 = g \cdot f(X_1) & \subset & X_2, \\
X_4 = g \cdot f(X_2) & \subset & X_3, \\
 & \vdots & \\
X_{2k} = g \cdot f(X_{2k-2}) & \subset & X_{2k-1}, \\
X_{2k+1} = g \cdot f(X_{2k-1}) & \subset & X_{2k}, \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Это значит, что имеются биекции между множествами

$$\begin{array}{cccccccccc}
X & \supset X_1 & \supset X_2 & \supset X_3 & \supset X_4 & \dots & X_{2k} & \supset X_{2k+1} & \dots & \supset \bigcap X_k \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & X & \supset X_1 & \supset X_2 & \dots & X_{2k-2} & \supset X_{2k-1} & \dots & \supset \bigcap X_k
\end{array}$$

а, следовательно, имеются биекции между разностями

$$\begin{array}{cccccccc}
(X_2 \setminus X_3) & (X_3 \setminus X_4) & (X_4 \setminus X_5) & \dots & (X_{2k} \setminus X_{2k+1}) & (X_{2k+1} \setminus X_{2k+2}) & \dots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\
(X \setminus X_1) & (X_1 \setminus X_2) & (X_2 \setminus X_3) & \dots & (X_{2k-2} \setminus X_{2k-1}) & (X_{2k-1} \setminus X_{2k}) & \dots
\end{array}$$

Множество X представляется в виде несвязного объединения ($X = X_0$)

$$X = \coprod_{k=0}^{\infty} (X_k \setminus X_{k+1}) \sqcup \bigcap_k X_k.$$

Это объединение можно разбить на две части, объединение по четным номерам и объединение по нечетным номерам. Получаем

$$X = \coprod_{k=0}^{\infty} (X_{2k} \setminus X_{2k+1}) \sqcup \coprod_{k=0}^{\infty} (X_{2k+1} \setminus X_{2k+2}) \sqcup \bigcap_k X_k.$$

Поскольку каждое множество $(X_{2k}\setminus X_{2k+1})$ равномощно множеству $(X_{2k+2}\setminus X_{2k+3})$, то в первое слагаемое можно заменить на ему равномощное:

$$X \sim \coprod_{k=0}^{\infty}(X_{2k+2}\setminus X_{2k+3}) \sqcup \coprod_{k=0}^{\infty}(X_{2k+1}\setminus X_{2k+2}) \sqcup \bigcap_{k} X_k.$$

Другими словами

$$\begin{array}{rcl} X & \sim & \coprod\limits_{k=1}^{\infty}(X_{2k}\setminus X_{2k+1}) \sqcup \coprod\limits_{k=0}^{\infty}(X_{2k+1}\setminus X_{2k+2}) \sqcup \bigcap_k X_k = \\ & = & \coprod\limits_{k=1}^{\infty}(X_k\setminus X_{k+1}) \sqcup \bigcap_k X_k = X_1 \sim Y. \end{array}.$$

$\blacksquare$

Доказательство. (Другая версия доказательства).

Дано три множества $Y_0 \supset X_0 \supset Y_1$, причем множество Y_0 равномощно множеству Y_1. Значит имеется биекция $g : Y_0 \longrightarrow Y_1$. Можно построить убывающую последовательность подмножеств

$$Y_0 \supset X_0 \supset Y_1 \supset X_1 \supset Y_2 \supset X_2 \supset Y_3 \supset \dots \supset Z = \bigcap Y_i = \bigcap X_i$$

где $X_1 = g(X_0)$, $Y_2 = g(Y_1)$, $\dots X_{k+1} = g(X_k)$, $Y_{k+2} = g(Y_{k+1})$, $\dots$ Все это можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} Y_0 \supset X_0 \supset & Y_1 & \supset & X_1 & \supset & Y_2 & \supset X_2 \supset Y_3 \supset X_3 \supset Y_4 \supset X_4 \cdots \supset & Z \\ & \uparrow g & & \uparrow g & & \uparrow g & \cdots & \uparrow g \\ & Y_0 & \supset & X_0 & \supset & Y_1 & \supset X_1 \supset Y_2 \supset X_2 \supset Y_3 \supset X_3 \cdots \supset & Z \end{array}$$

причем вертикальное отображение является биекцией в каждом члене. Тогда оба множества X_0 и Y_0 можно представить в виде несвязных объединений:

$$\begin{array}{lcccccccccc} X_0 = & (X_0\setminus Y_1) \sqcup & (Y_1\setminus X_1) & \sqcup & (X_1\setminus Y_2) \sqcup (Y_2\setminus X_2) & \sqcup & (X_2\setminus Y_3) & \sqcup \dots \sqcup Z \\ & & \uparrow g & & & & \uparrow g & \\ Y_0 = & & (Y_0\setminus X_0) & \sqcup & (X_0\setminus Y_1) \sqcup (Y_1\setminus X_1) & \sqcup & (X_1\setminus Y_2) & \sqcup \dots \sqcup Z \end{array}$$

Сужения отображений

Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – некоторое отображение, $Z \subset X$ – некоторое подмножество. *Сужением* отображения f на подмножество Z называется отображение $f_Z : Z \longrightarrow Y$, задаваемое по формуле

$$f_Z(z) = f(z), \quad z \in Z \subset X.$$

Сужение f_Z отображения f на подмножество Z называют также *ограничением* отображения f на подмножество Z. Сужение f_Z является композицией двух отображений: вложения $Z \subset X$ и исходного отображения $f : X \longrightarrow Y$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "f_Z"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Конструкции множеств

Несвязное объединение

Пусть задано два множества X и Y. *Несвязное объединение* – это множество $X \sqcup Y$, состоящее из всех элементов как множества X, так и множества Y, причем предполагается, что множества X и Y не имеют общих элементов. (Замечание. В случае, когда два множества X и Y имеют общие элементы в виде непустого пересечения $X \cap Z$ множеств X и Y как подмножеств одного большего множества Z, их несвязное объединение следует определять для других равномощных уже непересекающихся множеств). У несвязного объединения имеется два канонических инъективных отображения (*вложение на слагаемое*)

$$i_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y \text{ и } i_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y,$$

для которых выполняются категорное свойство универсальности: если задано два отображения

$$f : X \longrightarrow Z \text{ и } g : Y \longrightarrow Z,$$

то существует единственное отображение

$$f \sqcup g : X \sqcup Y \longrightarrow Z,$$

которое на подмножестве X совпадает с отображением f, а на подмножестве Y совпадает с отображением g, т.е.

$$(f \sqcup g) \cdot i_X = f, \quad (f \sqcup g) \cdot i_Y = g,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i_X"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ & X \sqcup Y \arrow[r, "f \sqcup g"] & Z \\ Y \arrow[ur, "i_Y"] \arrow[urr, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Декартово произведение

Для двух множеств X и Y определяем *декартово произведение* $X \times Y$ как множество всех таких пар (x, y) элементов, для которых $x \in X$, $y \in Y$. Множества X и Y при этом называются сомножителями декартового произведения. Имеются два отображения $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ и $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$, которые называются *проекциями* на первый (второй) сомножитель и которые задаются формулами

$$p_X(x, y) \equiv x; \quad p_Y(x, y) \equiv y; \quad x \in X;\ y \in Y.$$

У каждого элемента $(x, y) \in X \times Y$ декартового произведения x и y называются координатами.

По аналогии с несвязным объединением для двух отображений

$$f : Z \longrightarrow X \text{ и } g : Z \longrightarrow ZY,$$

существует единственное отображение

$$f \times g : Z \longrightarrow X \times Y,$$

которое сопоставляет элементу $z \in Z$ пару $(f \times g)(z) \equiv (f(z), g(z))$ т.е.

$$p_X(f \times g)(z)) \equiv f(z), \quad p_Y(f \times g)(z)) \equiv g(z),$$

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
& X \times Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] & Z \arrow[l, "f\times g"'] \arrow[ull, "f"'] \arrow[dll, "g"] \\
Y & &
\end{tikzcd}$$

Декартово произведения семейства множеств

Пример: векторные пространства $\mathbf{R}^n$

Арифметическое n–мерное пространство $\mathbf{R}^n$ канонически отождествляется с декартовым произведением своих подпространств $\mathbf{R}^1_k \approx \mathbf{R}^1$:

$$R^n \approx \prod_{k=1}^{n} \mathbf{R}^1_k.$$

Собственно, произвольный вектор $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ задается набором своих координат $\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а каждая координата x^k принадлежит одномерному пространству $\mathbf{R}^1 \approx \mathbf{R}^1_k$. Разбивая множество координат на две группы (или несколько групп) получаем естественные отождествления

$$\mathbf{R}^{n+k} \approx \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k,$$

$$\mathbf{R}^{k_1 + k_2 + \cdots + k_l} \approx \prod_{i=1}^{l} \mathbf{R}^{k_i}.$$

График отображения

Для (однозначного) отображения $f : X \longrightarrow Y$ *график* отображения $\Gamma_f \subset X \times Y$ задается как подмножество

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x), x \in X\}$$

Нетрудно видеть, что проекция

$$pr_X : X \times Y \longrightarrow Y$$

на первый сомножитель отображает график Γ_f взаимнооднозначно на множество X. Верно и обратное утверждение: если подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ удовлетворяет условию, что проекция $pr_X : \Gamma \longrightarrow X$ отображает множество Γ взаимнооднозначно на множество X, то множество Γ_f является графиком некоторого отображение $f : X \longrightarrow Y$, $\Gamma = \Gamma_f$.

Фактор множества

Пусть задано некоторое множество X и некоторое отношение эквивалентности $\sim$ в нем. Множество X разбивается на непересекающиеся подмножества попарно эквивалентных элементов. Фактор множеством $X/\sim$ называется множество, элементами которого служат подмножества попарно эквивалентных элементов в множестве X. Имеется естественное отображение $p_\sim : X \longrightarrow X/\sim$, которое любому элементу $x \in X$ сопоставляет подмножество всех элементов, эквивалентных элементу x. Это отображение является сюръекцией множества X не фактор множество $X/\sim$.

Обратно, если имеется некоторая сюръекция $p : X \longrightarrow Y$, то на множестве X задается естественное отношение по правилу: $x \sim y$, тогда и только тогда, когда $p(x) = p(y)$. Это отношение, очевидно является отношением эквивалентности. Тогда отображение p расщепляется в композицию

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_\sim"'] & & Y \\ & (X/\sim) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

у которой отображение f взаимно однозначным соответствием, т.е. биекцией.

Упорядоченные множества

Говорят, что на множестве X задан *частичный порядок,* если для некоторых пар элементов $x, y \in X$ задано отношение $x \prec y$, которое удовлетворяет условиям:

1. Если $x \preceq y$ и $y \preceq z$, то $x \preceq z$, $z, y, z \in X$;

2. Если $x \preceq y$ и $y \preceq x$, то $x = y$, $x, y \in X$;

3. Для любого элемента $x \in X$ выполнено $x \preceq x$.

Если $x \preceq y$, то мы будем также писать $y \succeq x$. Если $x \preceq y$ и $x \neq y$, то будем писать $x \prec y$.

Множество X, оснащенное частичным порядком $\preceq$, т.е. пара $(X, \prec)$ называется *частично упорядоченным множеством.* Если кроме этого выполнено дополнительное условие, что для любых двух элементов $x, y \in X$ либо $x \preceq y$, либо $y \preceq x$, то множество X называется *линейно упорядоченным множеством.* , а частичный порядок $\preceq$ называется *линейным порядком* .

Пример: линейный порядок вещественных чисел

На множестве всех вещественных чисел имеется естественный линейный порядок: для двух вещественных чисел x, y будем писать $x \preceq y$ в случае, когда $x \leq y$. Это линейный порядок.

Направленное множество

Пусть на частично упорядоченном множестве $(X, \prec)$ выполнено условие: для любых двух элементов $x, y \in X$ найдется такой третий элемент $z \in X$, что

$$x \prec z, \quad y \prec z.$$

В этом случае будем говорить, что частично упорядоченное множество $(X, \prec)$ является *направленным.*

Рассмотрим направленное множества индексов $(A, \prec)$ и семейство элементов $x_\alpha \in X$ множества X, индексированное направленным множеством A. Такое семейство будем называть *направленностью.* В одном частном случае, когда направленное множество состоит из натуральных чисел, $A = \mathbf{N}$, направленность будет называться (счетной) *последовательностью.*

В частности, линейно упорядоченное множество является направленным.

Пример: частичный порядок на арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$

Зададим в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ следующий частичный порядок: пусть $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ – два вектора. Скажем, что $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, если

$$x^1 \leq y^1, x^2 \leq y^2, \ldots, x^n \leq y^n.$$

Легко проверить, что отношение $\prec$ задает частичный порядок на множестве $\mathbf{R}^n$ превращая его в направленное множество. При $n \geq 2$ частичный порядок на $\mathbf{R}^n$ не является линейным порядком.

Направленное множество, конфинальное другому направленному множеству

Пусть задано два направленных множества $(A, \prec)$ и $(B, \prec)$. Скажем, что направленное множество $(B, \prec)$ конфинально направленному множеству $(A, \prec)$, если имеется отображение $f : B \longrightarrow A$, удовлетворяющее условию:

> Для любого элемента $\alpha_0 \in A$ найдется такой элемент $\beta_0 \in B$, что из $\beta_0 \prec \beta$ вытекает $\alpha_0 \prec f(\beta)$.

Если $x_\alpha \in X, \quad \alpha \in A$ некоторая направленность, индексированная направленным множеством A, а направленное множество B – конфинально множеству A при момощи отображения $f : B \longrightarrow A$, то направленность $x_{f(\beta)} \in X, \quad \beta \in B$ будем называть поднаправленностью направленности $x_\alpha \in X, \quad \alpha \in A$.

В классическом случае натуральных чисел $\mathbb{Z}$ если задана последовательность $x_n \in X, \quad n \in \mathbb{Z}$ и конфинальное семейство индексов $n_k \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$, то последовательность $x_{n_k} \in X, \quad k \in \mathbb{Z}$ есть подпоследовательность последовательности x_n.

Декартово произведение частично упорядоченных множеств

Пример: частичный порядок на арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$

Зададим в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$ следующий частичный порядок: пусть $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ – два вектора. Скажем, что $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, если

$$x^1 \leq y^1, x^2 \leq y^2, \ldots, x^n \leq y^n.$$

Легко проверить, что отношение $\prec$ задает частичный порядок на множестве $\mathbf{R}^n$ превращая его в направленное множество. При $n \geq 2$ частичный порядок на $\mathbf{R}^n$ не является линейным порядком.

Прямой и обратный пределы

Рассмотрим частично упорядоченное множество $A, \prec$. Прямым спектром множеств называется направленность множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, снабженная системой отображений $\varpi^\alpha_\beta : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ для $\alpha \prec \beta$,которая удовлетворяет условию:

> Если $\alpha \prec \beta \prec \gamma$, и мы имеем три отображения
>
> $$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "\varpi^\alpha_\beta"'] \arrow[rr, bend left, "\varpi^\alpha_\gamma"] & X_\beta \arrow[r, "\varpi^\beta_\gamma"'] & X_\gamma \end{tikzcd}$$
>
> то диаграмма коммутативна, т.е. $\varpi^\beta_\gamma \cdot \varpi^\alpha_\beta = \varpi^\alpha_\gamma$.

Тогда на несвязном объединении $X = \coprod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ можно задать следующее отношение эквивалентности между двумя элементами $x_\alpha \in X_\alpha$ и $x_\beta \in X_\beta$: для индексов $\alpha, \beta \in A$ в направленном множестве A имеется третий индекс γ, удовлетворяющий неравенствам $\alpha \prec \gamma$ и $\beta \prec \gamma$. Полагаем $x_\alpha \sim x_\beta$, если $\varpi^\alpha_\gamma(x_\alpha) = \varpi^\beta_\gamma(x_\beta) \in X_\gamma$. Нетрудно проверить, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Прямым пределом прямого спектра называется фактор множество множестваX, профакторизованное по отношению эквивалентности $\sim$, т.е.

$$\varinjlim_\alpha X_\alpha = X/\sim .$$

Все вместе это дает пополненную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[dr, "\varpi^\alpha_\beta"'] \arrow[drr, bend left, "\varpi^\alpha_\delta"] \arrow[drrr, bend left, "\varpi^\alpha_\infty"] & & & \\
& X_\gamma \arrow[r, "\varpi^\gamma_\delta"'] & X_\delta \arrow[r, "\varpi^\delta_\infty"'] & \varinjlim\limits_\alpha X_\alpha \\
X_\beta \arrow[ur, "\varpi^\beta_\gamma"] \arrow[urr, bend right, "\varpi^\beta_\delta"] \arrow[urrr, bend right, "\varpi^\beta_\infty"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Обратный предел строится для обратного спектра двойственным образом. Прежде всего определим обратный спектр как направленность множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, снабженная системой отображений $\varpi^\beta_\alpha : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ для $\alpha \prec \beta$, которая удовлетворяет условию:

Если $\alpha \prec \beta \prec \gamma$, и мы имеем три отображения

$$\begin{tikzcd}
X_\gamma \arrow[r, "\varpi^\gamma_\beta"'] \arrow[rr, bend left, "\varpi^\gamma_\alpha"] & X_\beta \arrow[r, "\varpi^\beta_\alpha"'] & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

то диаграмма коммутативна, т.е. $\varpi^\beta_\alpha \cdot \varpi^\gamma_\beta = \varpi^\gamma_\alpha$.

Вполне упорядоченные множества. Кардинальные и порядковые числа

Теорема 2 *Любое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство.

Пусть M — произвольное данное множество. Покажем, что его можно вполне упорядочить. Рассмотрим совокупность $\mathcal{M}$ всех пар $(A, \leq_A)$, где $A \subset M$, а $\leq_A$ — отношение полного порядка на A. На множестве $\mathcal{M}$ введем естественное отношение порядка: $(B, \leq_B)$ следует за $(A, \leq_A)$, если $(A, \leq_A)$ есть начальный отрезок в $(B, \leq_B)$, то есть если $A = \{a \in B : a < b\}$ для некоторого $b \in B$ и на множестве A отношение $\leq_B$ совпадает с $\leq_A$. Далее докажем два утверждения. I. В $\mathcal{M}$ существует максимальный элемент. Это следует из того факта, что если $\mathcal{C}$ — цепь в $\mathcal{M}$, то объединение всех элементов $C \in \mathcal{C}$ есть также элемент $\mathcal{M}$, который является верхней гранью цепи $\mathcal{C}$. II. Если $(A, \leq_A)$ — максимальный элемент, то $A = M$. Если бы $M \setminus A$ было непусто, то взяв какой-нибудь элемент $b \in M \setminus A$, и положив $b > a$ для любого $a \in A$, мы получили бы вполне упорядоченное множество $A \cup \{b\}$, начальным отрезком которого является A. Это противоречит предположению о максимальности $(A, \leq_A)$. Таким образом, мы имеем вполне упорядоченное множество $(M, \leq_M)$. Что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Теорема 3 *Любое множество кардинальных чисел вполне упорядочено.*

Доказательство. Пусть M – некоторое множество кардинальных чисел. Реализуем каждое кардинальное число в виде мощность некоторого множества, т.е. множества $X_\alpha, \quad \alpha \in M$. Можно считать, что каждое множество вполне упорядочено с помощью полного порядка $\leq_\alpha$. Тогда если $\alpha < \beta$, то множество X_α является начальным отрезком множества X_β. $\blacksquare$

Мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется счетной мощностью и обозначается через $\aleph_0$? Множества мощности меньше чем счетная называются конечными множествами.

Теорема 4 *Множество X является конечным тогда и только тогда, когда для любого его собственного подмножества $Y \subset X, \quad Y \neq X$, его мощность строго меньше, $\#(Y) < \#(X)$.*

Теорема 5 (Кантор) *Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.*

Доказательство.

Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A, то есть, что существует такая биекция $f : A \longrightarrow 2^A, \quad f(a) \subset A, \quad a \in A$, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A. Рассмотрим подмножество $B \subset A$, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих своим образам при отображении f:$B = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Поскольку отображение f биективно, то должен существовать такой элемент $b \in A$, что $f(b) = B$.

Теперь посмотрим, может ли элемент b принадлежать подмножеству B. Если $b \in B$, т.е. $b \in f(b)$, получаем по определению, что $b \notin B$. И наоборот, если $b \notin B$, т.е. $b \notin f(b)$, то, значит, согласно определению $b \in B$. В любом случае, получаем противоречие. Следовательно, исходное предположение ложно и, следовательно, множество A не равномощно множеству 2^A.

Заметим, что множество 2^A содержит подмножество, равномощное множеству A (например, множество всех одноэлементных подмножеств), а тогда из только что доказанного следует, что $\#(A) < \#(2^A)$.

Замечание 1 *Из теоремы Кантора следует, что кардинальные числа не имеют максимального кардинального числа, и, значит, не могут образовывать конечное множество.*

Задачи и упражнения

1. Приведите пример непустого множества, каждый элемент которого является некоторым подмножеством этого множества.

2. Для каждого целого $n > 0$ постройте множество $_n$, состоящее ровно из n элементов, такое, что для любых $\in _n, ' \in _n$ либо $\in '$, либо $' \in$.

3. Докажите, что для любого множества A выполняются следующие свойства:

   (a) $A \cap A = A$,

   (b) $A \cup A = A$,

   (c) $A \cup \emptyset = A$,

   (d) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4. Докажите, что для любых множеств A и B включение $A \subset B$ выполняется тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$ или когда $A \cup B = B$.

5. Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, и $A \cup B = B$.

6. Докажите, что для подмножеств $A, B \subset X$ включение $A \subset B$ эквивалентно включению $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.

7. Для любых двух множеств A и B имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A).$$

8. Для любых двух множеств A и B имеет место следующее несвязное объединение

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

9. Для любых двух множеств A и B условие $A \subset B$ эквивалентно условию $A \setminus B = \emptyset$.

10. Докажите, что $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

11. Докажите, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

12. Обозначим через $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Докажите, что
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

Отображения множеств

13. Доказать, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то и множества A иB равномощны.

14. Пусть мощность конечного множества A равна n. Какова мощность множества 2^A всех его подмножеств (включая само множество A и пустое множество)?

Конструкции множеств

15. Доказать, что множество X конечно в том и только в том случае, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству.

16. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.

17. Доказать, что в каждом бесконечном множестве существует бесконечное счетное подмножество.

18. Доказать, что Каждое бесконечное счетное множество можно представить как несвязное объединение двух непересекающихся бесконечных (тоже счетных) подмножеств.

19. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

20. Доказать, что если и — счетные множества, то их объединение $A \cup$ — счетное множество.

21. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.

22. Доказать, что если множества X и Y счетны, то декартово произведение $X \times Y$ тоже счетно.

23. Доказать, что множество многочленов с рациональными коэффициентами не более чем счетно.

24. Доказать, что множество алгебраических чисел не более чем счетно.

25. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ сюръективно, а множество X счетно, то Y не более чем счетно.

26. Показать, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ инъективно, а множество Y счетно, то X не более чем счетно.

27. Показать, что если множество X счетно, то множество всех конечных подмножеств в X тоже счетно.

28. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.

29. Доказать, что если X — несчетное множество, а A — его счетное подмножество, то $\#(X \setminus A) = \#(X)$.

30. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассыпаны "кнопки"без пересечений, т.е. такие подмножества, каждое из которых состоит из объединения трех отрезков с общим началом. Доказать, что семейство таких "кнопок"не более чем счетно.

31. Показать, что множество иррациональных чисел несчетно.

32. Показать, что множество трансцендентных чисел несчетно.

Список литературы

[1] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию,* "Наука Москва, 1977

[2] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии,* Москва, 2000

[3] О.Я.Виро и др. *Элементарная топология,*