"Введение в топологию", конспект лекции 4.

А.С.Мищенко

17 сентября 2012 г.

План

Конструкции топологических пространств

Несвязное объединение топологических пространств

Определение 1 *На несвязном объединении $X \sqcup Y$ двух топологических пространств X и Y топология задается каноническим образом: подмножество $U \subset X \sqcup Y$ считается открытым тогда и только тогда, когда пересечение $U \cap X$ открыто в X, а пересечение $U \cap Y$ открыто в Y.*

Аналогично определяется топология на несвязном объединении $\coprod\limits_{\alpha} X_\alpha$ произвольного семейства топологических пространств X_α: подмножество $U \subset \coprod\limits_{\alpha} X_\alpha$ считается открытым тогда и только тогда, когда пересечение $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для произвольного индекса α. В частности, каждое слагаемое X_α является открытым подмножеством в несвязном объединении $\coprod\limits_{\alpha} X_\alpha$.

Декартово произведение топологических пространств

Определение 2 *Пусть $Z = X \times Y$ – декартово произведение двух топологических пространств X и Y. Топология в декартовом произведении задается следующим каноническим образом: Семейство подмножеств вида $U \times V \subset X \times Y$, у которых подмножество U открыто в X, а подмножество V открыто в Y, объявляется базой открытых множеств в топологии пространства Z.*

Другими словами, подмножество $W \subset X \times Y$ является открытым множеством, если для любой его точки $(x, y) \in X \times Y$ имеются такие окрестности $x \in U \subset X$ и $y \in V \subset Y$, что

$$(x, y) \in U \times Y \subset W \subset X \times Y.$$

Заметим, что декартово произведение $W = U \times V$ двух открытых подмножеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ является открытым подмножеством в $X \times Y$. Обратное, вообще говоря не верно: открытое подмножество $W \subset X \times Y$ не обязано быть декартовым произведением, как показывает нижеследующий пример эвклидовых пространств. Разобрать более подробно!

Декартово произведение эвклидовых пространств

Теорема 1 *Топология в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ совпадает с топологией в декартовом произведении $\prod\limits_{k=1}^{n} \mathbf{R}^1_k$, где $\mathbf{R}^1_k$ – копия одномерного пространства $\mathbf{R}^1$.*

Сходимость в декартовых произведениях

Теорема 2 *Направленность $z_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \in X \times Y$ имеет предел тогда и только тогда, когда существуют пределы направленностей x_α, $\mathbf{y}_\alpha$, причем*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} z_\alpha = (\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha, \lim_{\alpha \longrightarrow \infty} y_\alpha).$$

Непрерывность канонических отображений

Вложение в несвязное объединение

Теорема 3 *Канонические вложения*

$$i_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y \text{ и } i_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$$

непрерывны.

Проекции в декартовом произведении

Теорема 4 *Канонические проекции* $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ *и* $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$

$$p_X(x,y) \equiv x; \quad p_Y(x,y) \equiv y; \quad x \in X;\ y \in Y$$

непрерывны.

График непрерывного отображения

Напомним, что график отображения $f : X \longrightarrow Y$ это подмножество $\Gamma_f \subset X \times Y$.

Теорема 5 *Пусть пространство* Y *хаусдорфово. Если отображение* $f : X \longrightarrow Y$ *топологических пространств непрерывно, то график* $\Gamma_f \subset X \times Y$ *этого отображения является замкнутым подмножеством в декартовом произведении* $X \times Y$.

Доказательство. Пусть отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно. Покажем, что график отображения $\Gamma_f \subset X \times Y$ есть замкнутое подмножество. Для этого проверим, что , если $z_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \in \Gamma_f \subset X \times Y$ некоторая направленность, имеющая предел

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} z_\alpha = z_0 = (x_0, y_0).$$

Согласно теореме 2 существует покоординатные пределы

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0,$$

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} y_\alpha = y_0.$$

Поскольку $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Gamma_f$, то $y_\alpha = f(x_\alpha)$. Поскольку отображение f непрерывно, то по теореме **??**

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} y_\alpha = \lim_{\alpha \longrightarrow \infty} f(x_\alpha) = f(x_0).$$

Поскольку пространство Y хаусдорфово, предел направленности единственен, т.е получаем, что $y_0 = f(x_0)$. Следовательно, $z_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma_f$, что и означает, что подмножество Γ_f замкнуто. ∎

Обратное утверждение вообще говоря неверно. Например, рассмотрим следующее отображение $f : \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^1$,

$$f(x) = \tfrac{1}{x}, \quad x \neq 0, f(0) = 0.$$

Это отображение не является непрерывным, в то время как его график $\Gamma_f \subset \mathbf{R}^2$ является замкнутым подмножеством.

Декартово произведение (бесконечного) семейства топологических пространств

Рассмотрим семейство топологических пространств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и их декартово произведение $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Напомним, что на множестве X имеются естественные проекции $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ на соответствующий сомножитель X_α.

Определение 3 *На множестве X зададим топологию, у которой предбаза открытых множеств задается как всевозможные прообразы $\{p_\alpha^{-1}(U)\}$ открытых подмножеств $U \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$.*

Другими словами, подмножества $p_\alpha^{-1}(U) \subset X$, которые образуют предбазу (Проверить наличие определения!) топологии в X, имеют вид

$$p_\alpha^{-1}(U) = U \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta.$$

При этом база топологии, порожденная указанной предбазой, состоит из всевозможных декартовых произведений вида

$$\prod_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \times \prod_{\beta\neq\alpha_i} X_\beta.$$

Определение 4 *Приведенная топология в декартовом произведении топологических пространств называется тихоновской топологией, а топологическое пространство с этой топологией называется тихоновским произведением топологических пространств X_α.*

Имеет место

Теорема 6 *Топология тихоновского произведения $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ является минимальной топологией на множестве X, для которой все проекции $p_{X_\alpha} : X \longrightarrow X_\alpha$ непрерывны.*

В случае, когда семейство сомножителей $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ конечно, база топологии в декартовом произведении $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ задается всевозможными произведениями $U = \prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ открытых подмножеств $U_\alpha \subset X_\alpha$. (В соответствии с ранее приведенным определением!)

Теорема 7 *Если все пространства X_α хаусдорфовы, то их тихоновское произведение $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ является хаусдорфовым пространством.*

Фактор топология.

Определение фактор топологии.

Три важных примера фактор пространств. (по Ward)

Вещественное проективное пространство.

Лента Мебиуса.

Тор.

Другие примеры.

Бутылка Клейна.

Конусы и цилиндры отображений

Надстройка.