"Введение в топологию",
конспект лекции 5.

А.С.Мищенко

27 сентября 2012 г.

План

Расстояния между подмножествами.
Аксиомы отделимости.
T_0,T_1,T_2,T_3,T_4. Нормальность $(T_1 + T_4)$.
Аксиомы отделимости в метрических пространствах.
Всякое метрическое пространство нормально..
Лемма Урысона, теорема Титца, разбиение единицы.
Вторая аксиома счетности.
.

Свойства метрических пространств

1 Метрики

Метризуемые пространства

Эквивалентные метрики

Изометрии

Сжимающие отображения

Расстояния между подмножествами

Расстоянипе от точки до подмножества

Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Громова-Хаусдорфа

2 Нормированные векторные пространства.

Топологические свойства

3 Аксиомы отделимости

T_0,T_1,T_2,T_3,T_4. Нормальность (T_1+T_4)

Аксиомы отделимости в метрических пространствах.

Всякое метрическое пространство нормально.

Доказательство. Пусть (X,ρ) метрическое пространство, $A,B\subset X$, $A\cap B=\emptyset$ два непересекающихся замкнутых множества, $\overline{A}=A$, $\overline{B}=B$. Требуется построить их непересекающиеся окрестности. Полагаем

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{x\in A} O(x,\tfrac{1}{4}\rho(x,B)),\\ V &= \bigcup_{y\in B} O(y,\tfrac{1}{4}\rho(y,A)). \end{aligned}$$

Если имеется общая точка $z\in U\cap V$, то должны выполняться включения для некоторых x и y:

$$z\in O(x,\frac{1}{4}\rho(x,B)) \quad z\in O(y,\frac{1}{4}\rho(y,A)),$$

т.е. неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x,z) &< \tfrac{1}{4}\rho(x,B)\le \tfrac{1}{4}\rho(x,y),\\ \rho(y,z) &< \tfrac{1}{4}\rho(y,A)\le \tfrac{1}{4}\rho(y,x). \end{aligned}$$

Значит по неравенству треугольника получаем

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z) < \tfrac{1}{4}\rho(x,y) + \tfrac{1}{4}\rho(x,y) = \tfrac{1}{2}\rho(x,y),$$

что противоречит условию $x \neq y$.

Лемма Урысона, теорема Титца, разбиение единицы

Конструкция разделяющей функции для метрических пространств

Если A,B два замкнутых непересекающихся подмножества, то полагаем

$$f(x) = \frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A) + \rho(x,B)}.$$

Теорема 1 (лемма Урысона) *Пусть A и B -- непересекающиеся замкнутые подмножества нормальном топологическом пространстве X . Тогда существует такое непрерывное отображение*

$$f : X \longrightarrow [-1,1],$$

что $f(A) = \{-1\}$ и $f(B) = 1$.

Доказательство. Если пространство X является метрическим с метрикой ρ , то функцию f можно задать явной формулой:

$$f(x) = \frac{\rho(x,A) - \rho(x,B)}{\rho(x,A) + \rho(x,B)}$$

эта формула корректно определена, поскольку в знаменателе стоит функция, нигде не обращающаяся в ноль. В самом деле, если бы в некоторой точке $x_0 \in X$ выполнялось равенство

$$\rho(x_0,A) + \rho(x_0,B) = 0,$$

то, поскольку значение метрики всюду неотрицательно, мы получили бы два равенства

$$\rho(x_0,A) = 0, \quad \rho(x_0,B) = 0.$$

Поскольку оба подмножества A и B замкнуты, то точка x_0 принадлежала бы как подмножеству A , так и подмножеству B , т.е. подмножества A и B имели бы не пустое пересечение, что противоречит условию теоремы.

Наконец, легко проверить, что, если $x \in A$, то

$$f(x) = \frac{0 - \rho(x,B)}{0 + \rho(x,B)} = -1.$$

Если же $x \in B$, то

$$f(x) = \frac{\rho(x,A) - 0}{\rho(x,A) + 0)} = +1.$$

В случае произвольного нормального топологического пространства X доказательство леммы Урысона несколько сложнее. Обозначим A через U_0 , а $X\backslash B$ через U_1 , $U_0 \subset U_1$. В силу нормальности пространства X существует открытое множество $U_{\frac{1}{2}}$, удовлетворяющее условию

$$U_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1.$$

Если выполнены условия $A \subset \overline{A} \subset B$, то будем писать для краткости $A \Subset B$. Таким образом имеем включения

$$U_0 \Subset U_{\frac{1}{2}} \Subset U_1.$$

Входящие в эти включения множества занумерованы двоично рациональными числами вида $r = \frac{q}{2^k}$, $0 \leq q \leq 2^k$ для $k = 1$. Мы можем продолжить построение множеств U_r , которые будут занумерованы двоично рациональными числами вида $r = \frac{q}{2^k}$, $0 \leq q \leq 2^k$ для больших значений k с условием: если $r_1 < r_2$, то

$$U_0 \Subset U_{r_1} \Subset U_{r_2} \Subset U_1.$$

Если $r_1 < r_2$ — два последовательных двоично рациональных числа степени 2^k т.е.

$$r_1 = \frac{q}{2^k}, \quad r_2 = \frac{q+1}{2^k},$$

и, значит, выполнены включения

$$U_{r_1} \Subset U_{r_2},$$

то из нормальности пространства X следует, что имеется такое открытое множество, скажем, U_{r_3} , $r_3 = \frac{2q+1}{2^{k+1}}$, что выполнены включения

$$U_{r_1} \Subset U_{r_3} \Subset U_{r_2}.$$

Таким образом, открытые множества Ur строятся для произвольных двоично рациональных чисел r в пределах $0 \leq r \leq 1$, для которых выполнены включения

$$U_{r_1} \Subset U_{r_2},$$

при $r_1 < r_2$.

Функция f строится по правилу:

$$f(x) = inf\{r : x \in U_r\}.$$

Для проверки непрерывности функции f достаточно доказать открытость прообраза предбазы топологии отрезка $[0, 1]$, т.е. множеств вида $V_r = \{f(x) < r\}$ и $W_r = f(x) > r$. Покажем, что множество V_r равно объединению

$$V_r = \bigcup_{r' < r} U_{r'},$$

а множество W_r равно объединению

$$W_r = \bigcup_{r'>r} (X \setminus \overline{U}_{r'}).$$

Пусть Закончить доказательство!

Теорема 2 (теорема Титца) *Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество в нормальном пространстве X, $f : A \longrightarrow [0,1]$ непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g : X \longrightarrow [0,1]$, т.е. $g\,|_A = f$.*

Следствие 1 *Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество в нормальном пространстве X, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, т.е. $g\,|_A = f$.*

3.0.1 Первая аксиома счетности

3.0.2 Вторая аксиома счетности

Теорема 3 *Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то оно сепарабельно.*

Теорема 4 *Евклидовы пространства и любые их подпространства сепарабельны и удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

4 Компактные пространства

Определение 1 *Определение компактного пространства с помощью открытых покрытий.*

Определение 2 *Определение компактного пространства с помощью замкнутых подмножеств с непустым пересечение.*

Определение 3 *Определение компактного пространства с помощью центрированной системы замкнутых подмножеств.*

Определение 4 *Определение компактного пространства с помощью направленностей.*

Определение 5 *Определение компактного пространства с помощью точек полного накопления.*

Определение 6 *Предел направленности и предельная точка направленности.*

Скажем, что направленность $x_\alpha, \quad \alpha \in A$, имеет предельную точку x_0, если для любой открытой окрестности $U \ni x$ и любого индекса $\alpha \in A$ существует больший индекс $\beta \succeq \alpha$, для которого $x_\beta \in U$.

Теорема 5 *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая направленность имеет предельную точку или, что то же самое, когда любая направленность имеет сходящуюся поднаправленность.*

Теорема 6 (Лемма Шуры-Буры) *Пусть X компактное топологическое пространство, $U \subset X$ — его открытое подмножество, $\mathfrak{F} = \{F_\alpha, \quad \alpha \in A\}$ семейство замкнутых подмножеств такое, что*

$$\bigcap \mathfrak{F} = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset U.$$

Тогда имеется конечное подсемейство $\mathfrak{F}_0 = \{F_\alpha, \quad \alpha \in A_0 \subset A\}$, для которого выполнено то же самое включение

$$\bigcap \mathfrak{F}_0 = \bigcap_{\alpha \in A_0} F_\alpha \subset U.$$

Эквивалентные определения

Теорема 7 (Теорема Тихонова) *Тихоновское произведение компактных пространств компактно.*

Доказательство.

Тихоновская топология на произведении топологических пространств — это минимальная топология, в которой все проекции на исходные пространства непрерывны. Конструктивно её можно также описать следующим образом: в качестве предбазы топологии на X берётся семейство множеств $\mathfrak{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \subset X_\alpha$ – -открыто $\}$. База топологии — всевозможные конечные пересечения множеств из $\mathfrak{P}$, а топология — всевозможные объединения множеств из базы.

Теорема Тихонова: Если все множества $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ компактны, тогда компактно и их тихоновское произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Доказательство. Согласно теореме Александера о предбазе, достаточно доказать, что всякое покрытие элементами предбазы $\mathfrak{P}$ допускает конечное подпокрытие.

Покрытие элементами предбазы $\mathfrak{P}$ есть семейство открытых множеств вида $\mathfrak{W} = \{W_\beta = \pi_{\alpha(\beta)}^{-1}(U_\beta), \quad U_\beta \subset X_{\alpha(\beta)}\}$. Для всякого пусть — объединение всех множеств , для которых множество содержится в покрытии. Тогда непокрытая часть пространства X, выражается формулой . Поскольку это множество пусто, пустым должен быть хотя бы один сомножитель. Это означает, что рассматриваемое покрытие при некотором содержит - прообраз покрытия пространства . В силу компактности пространства , из его покрытия можно выделить конечное подпокрытие, и тогда его прообраз относительно отображения будет конечным подпокрытием пространства X.

(см. http://ru.wikipedia.org/wiki/Тихоновское_произведение_топологических_пространств)

Теорема Александера о предбазе: Топологическое пространство компактно, тогда и только тогда, когда выделение конечного подпокрытия допускает каждое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии.

Доказательство. Необходимость в этом критерии компактности очевидна, так как все элементы предбазы - открытые множества. Достаточность доказывается методом от противного. Пусть пространство X некомпактно, хотя всякое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии, допускает выделение конечного подпокрытия. Пусть — база топологии пространства X, образованная этой предбазой. Каждый её элемент есть конечное пересечение элементов предбазы.

Множество всех возможных - покрытий пространства X (то есть составленных из элементов базы), не допускающих конечного подпокрытия, индуктивно упорядочено и непусто, следовательно, к нему применима лемма Цорна. Значит, существует максимальное (нерасширяемое) такое покрытие. Элементы предбазы , содержащиеся в нём, не образуют покрытия пространства X, следовательно, какая-то точка покрыта элементом базы , но покрытие не содержит ни один из элементов предбазы .

Далее используется максимальность рассматриваемого покрытия. После добавления к нему множества, можно выделить конечное подпокрытие. Объединяя все эти подпокрытия, выкидывая из них множества и добавляя множество , получается конечное покрытие пространства X, являющееся подпокрытием исходного покрытия. Противоречие (конечных подпокрытий исходное покрытие не допускало) доказывает теорему.

Несложное доказательство теоремы Александера можно получить, используя следующий критерий компактности: топологическое пространство компактно в том и только том случае, если каждый ультрафильтр на множестве имеет хотя бы один предел[3].

Теорема Александера носит теоретико-решёточный характер (поскольку формулируется в терминах свойств семейства открытых подмножеств топологического пространства, являющегося полной дистрибутивной решёткой) и допускает различные обобщения на специальные классы частично упорядоченных множеств[4][5][6].

(См. http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Александера_о_предбазе)

Локально компактные пространства

Паракомпактные пространства

Примеры

Предкомпактные подмножества

Критерий компактности подмножеств в конечномерном евклидовом пространстве