

"Введение в топологию",
конспект лекции 6.

А.С.Мищенко

15 октября 2012 г.

План

Вторая аксиома счетности.

.

1 Компактные пространства

Определение 1 *Определение компактного пространства с помощью открытых покрытий.*

Определение 2 *Определение компактного пространства с помощью замкнутых подмножеств с непустым пересечением.*

Определение 3 *Определение компактного пространства с помощью центрированной системы замкнутых подмножеств.*

Определение 4 *Определение компактного пространства с помощью направленностей.*

Определение 5 *Определение компактного пространства с помощью точек полного накопления.*

Определение 6 *Предел направленности и предельная точка направленности.*

Скажем, что направленность x_α , $\alpha \in A$, имеет предельную точку x_0 , если для любой открытой окрестности $U \ni x_0$ и любого индекса $\alpha \in A$ существует больший индекс $\beta \succeq \alpha$, для которого $x_\beta \in U$.

Теорема 1 *Направленность имеет предельную точку тогда и только тогда, когда она имеет поднаправленность, сходящуюся к этой точке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть направленность x_α , $\alpha \in A$ имеет предельную точку $x_0 \in X$. Рассмотрим новую направленное множество B , состоящую из всех пар (α, U) , где $U \ni x$ — произвольная окрестность точки x , а $\alpha \in A$ удовлетворяет условию $x_\alpha \in U$. Система окрестностей $\mathfrak{U} = \{U \ni x\}$ образует направленное семейство. Множество B является подмножеством в декартовом произведении $B \subset A \times \mathfrak{U}$, и, значит частично упорядочено. В действительности же множество B направлено. В самом деле, если $(\alpha, U), (\beta, V) \in B$, то в силу того, что точка x_0 является предельной, существует такой индекс $\gamma \succ \alpha, \gamma \succ \beta$, для которого $x_\gamma \in U \cap V$, что и означает, что множество B направлено. Направленное множество B конфинанльно направленному множеству A , поскольку отображение $f : B \rightarrow A, f(\alpha, U) = \alpha$, монотонно и для любого индекса α имеется индекс $\beta \succ \alpha$, для которого $x_\beta \in U$, т.е. $(\beta, U) \in B$ и $f(\beta, U) \succ \alpha$.

Таким образом, имеем поднаправленность $y_{(\alpha, U)} = x_\alpha, (\alpha, U) \in B$ направленности x_α , которая сходится к точке x_0 .

Обратное утверждение теоремы очевидно: если поднаправленность $y_{(\alpha, U)} = x_\alpha, (\alpha, U) \in B$ сходится к точке x_0 , то точка x_0 является предельной точкой направленности x_α .

Определение 7 *Скажем, что направленность $x_\alpha, \alpha \in A$, почти содержится в подмножестве $Y \subset X$, если существует такой индекс $\alpha_0 \in A$, что хвост $T_{\alpha_0}(x_\alpha)$ содержится в Y , $T_{\alpha_0}(x_\alpha) \subset Y$.*

Скажем, что направленность x_α , часто бывает в подмножестве $Y \subset X$, если каждый хвост $T_{\alpha_0}(x_\alpha)$ пересекается с Y , $T_{\alpha_0}(x_\alpha) \cap Y \neq \emptyset$.

Скажем, что направленность x_α , универсальна, если для любого подмножества $Y \subset X$ направленность x_α , почти содержится в одном из подмножеств Y или $X \setminus Y$.

Теорема 2 *У любой направленности $x_\alpha, \alpha \in A$, имеется универсальная поднаправленность.*

Теорема 3 *Универсальная направленность сходится к любой своей предельной точке.*

Теорема 4 *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая направленность имеет предельную точку или, что то же самое, когда любая направленность имеет сходящуюся поднаправленность. Эквивалентным образом, пространство компактно тогда и только тогда, когда любая универсальная направленность имеет предел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть топологическое пространство X компактно и $x_\alpha, \alpha \in A$ — некоторая направленность. Если точка y не является предельной, то это значит, что существует открытая окрестность $U_y \ni y$, для которой имеется такой индекс $\alpha = \alpha_y \in A$, что если $\beta \succ \alpha_y$, то $x_\beta \notin U_y$.

Если у направленности x_α нет предельных точек, то система окрестностей $\{U_y : y \in X\}$ покрывает все пространство X , т.е.

$$\bigcup_{y \in X} U_y = X.$$

Поскольку пространство X компактно, то открытое покрытие $\{U_y : y \in X\}$ имеет конечное подпокрытие, т.е. имеется конечное число точек $\{y_k \in X, k = 1, \dots, N\}$, для которых

$$\bigcup_{k=1}^N U_{y_k} = X.$$

Поскольку число точек $\{y_k \in X, k = 1, \dots, N\}$, конечно, то существует такой индекс $\beta \in A$, для которого выполнены все неравенства

$$\beta \succ \alpha_{y_k}, \quad k = 1, \dots, N,$$

и, значит $x_\beta \notin U_{y_k}, k = 1, \dots, N$, т.е. $x_\beta \notin \bigcup_{k=1}^N U_{y_k} = X$. Противоречие.

Обратно, предположим, что всякая направленность у топологического пространства X имеет предельную точку. Покажем, что X компактно. Рассмотрим некоторое открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$. Допустим противное, т.е., что всякое конечное подмножество $B \subset A$ не дает покрытия множествами $\mathfrak{U}_B = \{U_\alpha, \alpha \in B\}$, т.е. $\bigcup \mathfrak{U}_B \neq X$. Другими словами, имеется точка $x_B \in X$, которая не содержится в объединении $\bigcup \mathfrak{U}_B$,

$$x_B \notin \bigcup \mathfrak{U}_B.$$

Конечные множества $B \subset A$ образуют направленное семейство $\mathfrak{B} = \{B \subset A : \#(B) < \infty\}$ по включению. Значит, получаем направленность $\{x_B, B \in \mathfrak{B}\}$. По предположению, эта направленность имеет предельную точку, скажем, $x_0 \in X$, которая принадлежит некоторому элементу открытого покрытия, т.е. $x_0 \in U_{\alpha_0}$. А тогда существует такой индекс $B \in \mathfrak{B}$, что $B \succ \{\alpha_0\}$ и $x_B \in U_{\alpha_0}$. Условие же $B \succ \{\alpha_0\}$ означает, что $\alpha_0 \in B$, т.е. $x_B \in U_{\alpha_0}$. Противоречие. ■

Теорема 5 (Лемма Шуры-Буры) Пусть X компактное топологическое пространство, $U \subset X$ — его открытое подмножество, $\mathfrak{F} = \{F_\alpha, \alpha \in A\}$ семейство замкнутых подмножеств такое, что

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset U.$$

Тогда имеется конечное подсемейство $\mathfrak{F}_0 = \{F_\alpha, \alpha \in A_0 \subset A\}$, для которого выполнено то же самое включение

$$\bigcap_{\alpha \in A_0} F_\alpha \subset U.$$

Теорема 6 (Теорема Тихонова) *Тихоновское произведение компактных пространств компактно.*

Доказательство.

Тихоновская топология на произведении топологических пространств — это минимальная топология, в которой все проекции на исходные пространства непрерывны. Конструктивно её можно также описать следующим образом: в качестве предбазы топологии на X берётся семейство множеств $\mathfrak{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \subset X_\alpha \text{ — открыто}\}$. База топологии — всевозможные конечные пересечения множеств из \mathfrak{P} , а топология — всевозможные объединения множеств из базы.

Теорема Тихонова: Если все множества $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ компактны, тогда компактно и их тихоновское произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Доказательство. Согласно теореме Александера о предбазе, достаточно доказать, что всякое покрытие элементами предбазы \mathfrak{P} допускает конечное подпокрытие.

Покрытие элементами предбазы \mathfrak{P} есть семейство открытых множеств вида $\mathfrak{W} = \{W_\beta = \pi_{\alpha(\beta)}^{-1}(U_\beta), U_\beta \subset X_{\alpha(\beta)}\}$. Для всякого пусть — объединение всех множеств, для которых множество содержится в покрытии. Тогда непокрытая часть пространства X , выражается формулой. Поскольку это множество пусто, пустым должен быть хотя бы один сомножитель. Это означает, что рассматриваемое покрытие при некотором содержит $\pi_{\alpha(\beta)}^{-1}$ -прообраз покрытия пространства. В силу компактности пространства, из его покрытия можно выделить конечное подпокрытие, и тогда его прообраз относительно отображения будет конечным подпокрытием пространства X .

Теорема Александера о предбазе: Топологическое пространство компактно, тогда и только тогда, когда выделение конечного подпокрытия допускает каждое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии.

Доказательство. Необходимость в этом критерии компактности очевидна, так как все элементы предбазы — открытые множества. Достаточность доказывается методом от противного. Пусть пространство X некомпактно, хотя всякое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии, допускает выделение конечного подпокрытия. Пусть — база топологии пространства X , образованная этой предбазой. Каждый её элемент есть конечное пересечение элементов предбазы.

Множество всех возможных $\pi_{\alpha(\beta)}^{-1}$ -покрытий пространства X (то есть составленных из элементов базы), не допускающих конечного подпокрытия, индуктивно упорядочено и непусто, следовательно, к нему применима лемма Цорна. Значит, существует максимальное (нерасширяемое) такое покрытие. Элементы предбазы, содержащиеся в нём, не образуют покрытия пространства X , следовательно, какая-то точка покрыта элементом базы, но покрытие не содержит ни один из элементов предбазы.

Далее используется максимальность рассматриваемого покрытия. После добавления к нему множества, можно выделить конечное подпокрытие. Объединяя все эти подпокрытия, выкидывая из них множества и добавляя

множество \mathcal{U} , получается конечное покрытие пространства X , являющееся подпокрытием исходного покрытия. Противоречие (конечных подпокрытий исходное покрытие не допускало) доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Короткое доказательство.] Рассмотрим тихоновское произведение компактных пространств $X = \prod_{i \in I} X_i$. Точка $x \in X$ — это набор ее координат $x = \{x_i\}$, $x_i \in X_i$, $i \in I$.

Пусть $x_\alpha, \alpha \in A$ — некоторая универсальная направленность в пространстве X . Тогда каждая точка x_α задается своими координатами

$$x_\alpha = \{x_\alpha^i \in X_i\}.$$

При фиксированном номере $i \in I$ набор $x_\alpha^i, \alpha \in A$ задает универсальную направленность в компактном пространстве X_i , и, значит, имеет предел, скажем $y^i \in X_i$. Рассматривая точки $\{y^i, i \in I\}$ как координаты, получаем точку $y \in X$, $y = \{y^i, i \in I\}$. Покажем, что точка y является пределом для универсальной направленности $x_\alpha, \alpha \in A$. Для этого рассмотрим произвольную окрестность точки y . Эта окрестность без ограничения общности может иметь вид

$$\prod_{k=1}^N U_{i_k} \times \prod_{j \neq i_1, \dots, i_N} X_j.$$

Имеются такие индексы α_i , что хвост лежит в окрестности: $T_{\alpha_k}(x_{\alpha_k}^k) \subset U_{i_k}$.

1.0.1 Первая аксиома счетности

1.0.2 Вторая аксиома счетности

Теорема 7 Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то оно сепарабельно.

Теорема 8 Евклидовы пространства и любые их подпространства сепарабельны и удовлетворяют второй аксиоме счётности.

Теорема 9 (Урысон) Нормальное пространство со второй аксиомой счётности метризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{U_\alpha\}$ — счетная база открытых множеств в топологическом пространстве X . Поскольку пространство X нормально, то для любой точки $x \in X$ и элемента базы $U_\alpha \ni x$ найдется другой элемент базы $U_\beta \ni x$, $\beta = \beta(\alpha)$ такой, что $x \in U_\beta \subset \overline{U_\beta} \subset U_\alpha$. Пара (α, β) , для которой $U_\beta \subset \overline{U_\beta} \subset U_\alpha$ назовем допустимой парой. Для каждой допустимой пары (α, β) по лемме Урысона построим непрерывную функцию $\varphi_{\alpha, \beta} : X \rightarrow [0, 1]$, для которой

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, \beta}(x) &\equiv 1, & x \in U_\beta, \\ \varphi_{\alpha, \beta}(x) &\equiv 0, & x \notin U_\alpha, \end{aligned}$$

Семейство допустимых пар счетно, значит их можно занумеровать натуральными числами, т.е. каждая пара имеет вид (α_n, β_n) . Тогда положим $\varphi_n(x) = \varphi_{\alpha_n, \beta_n}(x)$

Рассмотрим пространство $\mathbb{Q} = \prod_{n=1}^{\infty} [1, \frac{1}{2^n}]$. Это пространство метризуемо, метрика задается формулой: пусть $x, y \in \mathbb{Q}$, $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^n}$, $0 \leq y_n \leq \frac{1}{2^n}$,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Построим отображение $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ по формуле

$$f(x) = \left\{ \frac{\varphi_n(x)}{2^n} \right\} \in \mathbb{Q}.$$

Отображение f взаимно однозначно. Действительно, если $x \neq y$, то найдется такой номер n , что $x \in U_{\beta_n}$, $y \notin U_{\alpha_n}$, значит n -я координата у точек $f(x)$ и $f(y)$ различна, т.е. $f(x) \neq f(y)$.

Непрерывность отображения f в точке x : пусть дано $\varepsilon = \frac{1}{2^N} > 0$. Первые N координат $\left\{ \frac{\varphi_k(x)}{2^k} \right\}_{k=1}^N$ задают непрерывное отображение, значит найдется такая окрестность $U \ni x$, что при $y \in U$ получаем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\varphi_k(x)}{2^k} - \frac{\varphi_k(y)}{2^k} \right)^2} < \varepsilon$$

или

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\varphi_k(x)}{2^k} - \frac{\varphi_k(y)}{2^k} \right)^2 < \varepsilon^2.$$

Локально компактные пространства

Паракомпактные пространства

Примеры

Предкомпактные подмножества

Критерий компактности подмножеств в конечномерном евклидовом пространстве