

# "Введение в топологию", конспект лекции 8.

А.С.Мищенко

24 октября 2012 г.

## План

**Гомотопии.**  $\pi(X, Y)$ , функториальность.

**Что такое категория.** Примеры категорий, функтор, гомотопический функтор. Категория гомотопических типов.

**Пунктированные пространства.** Категория пунктированных пространств. Морфизмы пунктированных пространств.

**Пары топологических пространств.** Тройки,  $n$ -ады.

**Ретракция.** Ретракт, деформационная ретракция, деформационный ретракт. Стягиваемость. Окрестностный ретракт.

**Пара Борсука.**

8

## Гомотопия.

Рассмотрим два топологических пространства  $X$  и  $Y$  и два непрерывных отображения

$$f_0, f_1 : X \rightarrow Y.$$

Будем говорить, что отображения  $f_0, f_1$  *гомотопны* и писать  $f_0 \sim f_1$ , если существует непрерывное отображение  $F$  декартового произведения  $X \times I$  пространства  $X$  на единичный отрезок вещественных чисел  $I = [0, 1]$ ,

$$F : X \times I \rightarrow Y,$$

для которого выполнены тождества

$$F(x, 0) \equiv f_0(x), \quad F(x, 1) \equiv f_1(x), \quad x \in X.$$

Отображение  $F$  называется *гомотопией* между отображениями  $f_0$  и  $f_1$ , а промежуточные отображения  $f_t(x) = F(x, t)$  называются *деформацией*, соединяющей отображения  $f_0$  и  $f_1$ .

Заметим, что единичный отрезок  $I$  в определении гомотопии можно заменить на произвольный отрезок вещественных чисел, поскольку все отрезки вещественных чисел вида  $[a, b]$  гомеоморфны между собой, а в качестве гомеоморфизма между ними можно выбрать линейное отображение. На пример, гомеоморфизм

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$$

можно задать формулой

$$\varphi(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1].$$

Из этого замечания следует, что отношение гомотопности между отображениями является отношением эквивалентности, т.е. выполнены естественные свойства отношения эквивалентности:

- $f \sim f$  ;
- из  $f \sim g$  следует  $g \sim f$  ;
- если  $f \sim g$  и  $g \sim h$  , то  $f \sim h$  .

Провести доказательное рассуждение!!

**Определение 1**  $\pi(X, Y)$

**Теорема 1** Пусть заданы непрерывные отображения

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y, \quad g_0, g_1 : Y \longrightarrow Z.$$

Если гомотопны отображения  $f_0$  и  $f_1$ , а также гомотопны отображения  $g_0$  и  $g_1$ , то соответствующие композиции  $h_0 = g_0 \cdot f_0$  и  $h_1 = g_1 \cdot f_1$  тоже гомотопны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Провести доказательное рассуждение!!

**Теорема 2** Функториальность:

$$\pi(X, Y) \times \pi(Y, Z) \longrightarrow \pi(X, Z)$$

**Определение 2** Категория гомотопических типов

**Теорема 3** Непрерывные отображения  $f, g : X \longrightarrow Y \times Z$  гомотопны тогда и только тогда, когда обе проекции на множители, т.е. композиции  $pr_X \cdot f, pr_X \cdot g$  и  $pr_Y \cdot f, pr_Y \cdot g$ , соответственно, гомотопны.

**Теорема 4** Иначе: Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(Z, X \times Y) & \xrightarrow{pr_X} & \pi(Z, X) \\ \downarrow pr_Y & \searrow \approx & \uparrow \\ \pi(Z, Y) & \longleftarrow & \pi(Z, X) \times \pi(Z, Y) \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, семейство всех непрерывных отображений  $\{f : X \rightarrow Y\}$  разбивается на классы попарно гомотопных непрерывных отображений. Категория топологических пространств и непрерывных отображений  $\mathcal{TOP}$  тем самым редуцируется до категории  $\mathcal{HT}$  так называемых *гомотопических типов*: объектами служат топологические пространства, а морфизмами — классы попарно гомотопных непрерывных отображений.

По аналогии с понятием гомеоморфизма в категории  $\mathcal{TOP}$  топологических пространств, в категории  $\mathcal{HT}$  гомотопических типов вводится понятие *гомотопической эквивалентности* топологических пространств. Напомним (см. ??), что под гомеоморфизмом мы понимаем обратимое непрерывное отображение, т.е. такое взаимно однозначное непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  пространства  $X$  на пространство  $Y$ , у которого обратное отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  тоже непрерывно. Другими словами, к отображению  $f$  имеется другое отображение  $g : Y \rightarrow X$ , причем две возможные композиции  $f$  и  $g$  являются тождественными отображениями, т.е.

$$f \cdot g = \text{Id}_Y, \quad g \cdot f = \text{Id}_X.$$

**Определение 3** Под *гомотопической эквивалентностью* между топологическими пространствами  $X$  и  $Y$  понимается такое непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , для которого имеется другое непрерывное отображение  $g : Y \rightarrow X$ , такое что две возможные композиции  $f$  и  $g$  гомотопны тождественным отображениям, т.е.

$$f \cdot g \sim \text{Id}_Y, \quad g \cdot f \sim \text{Id}_X,$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & g \cdot f \sim \text{Id}_X & & f \cdot g \sim \text{Id}_Y & & \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowleft & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g=f^{-1}} & X & \xrightarrow{f} & Y.
 \end{array}$$

В этом случае сами топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомотопически эквивалентными*

## Примеры

Привести доказательства!!

1. Гомеоморфные топологические пространства гомотопически эквивалентны.
2. Эвклидово пространство  $\mathbf{R}^n$  гомотопически эквивалентно одноточечному пространству  $\{x_0\}$  (которое можно отождествить с  $\mathbf{R}^0$ ).
3. Замкнутый диск  $D^n \subset \mathbf{R}^b$ ,  $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  гомотопически эквивалентен одноточечному пространству.
4. Открытый диск  $\overset{\circ}{D}^n \subset \mathbf{R}^b$ ,  $\overset{\circ}{D}^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$  гомотопически эквивалентен одноточечному пространству.

## Стягиваемость пространства к своему подпространству

**Определение 4** Ретракция, ретракт, деформационный ретракт, деформационная ретракция.

**Теорема 5** Ретракция  $X \xrightarrow{f} A \subset X$  это такое отображение  $f : X \rightarrow X$ , что  $f \cdot f = f$ . Здесь  $A$  — множество неподвижных точек отображения  $f$ .

**Теорема 6** Примеры ретрактов, которые не являются деформационными ретрактами

**Теорема 7** Примеры: Лист Мебиуса, цилиндр — деформационные ретракции на экватор

**Теорема 8** Конструкция Бинга — дом с двумя комнатами, у которого стенки образуют стягиваемое пространство.

**Теорема 9** Основание цилиндра отображения является его деформационным ретрактом.

## Пары топологических пространств. Пунктированные пространства

Парой топологических пространств  $(X, A)$  называется топологическое пространство  $X$  и его замкнутое подпространство  $A \subset X$ . Отображением пар  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  называется такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , для которого выполнено условие  $f(A) \subset B$ . Ограничение  $f_0 = f|_A : A \rightarrow B$  формирует тогда коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\subset} & X \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\subset} & Y \end{array} \quad (1)$$

Поэтому часто также пишут, что отображение пар это пара отображений  $(f, f_0)$ , для которой диаграмма (1) коммутативна.

Если в паре  $(X, A)$  подмножество  $A$  состоит из одной точки  $x_0$ , то тогда пространство  $X$  называется *пунктированным* пространством или *пространством с отмеченной точкой*  $x_0$ . При этом отображения пунктированных пространств должны переводит отмеченную точку в отмеченную точку. Такие отображения будем называть *пунктированными отображениями*.

*Гомотопия пар*

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

— это такая гомотопия, которая при каждом значении параметра  $t \in I$  отображает подмножество  $A$  в  $B$ , т.е.  $F$  есть отображение пары  $(X \times I, A \times I)$

$I$ ) в пару  $(Y, I)$ . В случае пунктированных пространств гомотопия при каждом значении параметра  $t \in I$  переводит отмеченную точку  $x_0 \in X$  в отмеченную точку  $y_0 \in Y$ .

Все выше сказанное позволяет определить категорию  $\mathcal{HT}_0$  пунктированных гомотопических типов как категорию пунктированных топологических пространств, морфизмы которых являются классами попарно гомотопных пунктированных отображений.

## Фундаментальная группа

Рассмотрим *замкнутый (ориентированный) пунктированный путь* в пунктированном пространстве как непрерывное отображение единичного отрезка  $I$  действительных чисел в пространство  $X$ ,

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X,$$

которое начинается и кончается в отмеченной точке  $x_0 \in X$ , т.е.

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0.$$

Другими словами, отображение  $\gamma$  является отображением пар

$$\gamma : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x_0).$$

Как и в случае гомотопий отображений заметим, что замкнутый путь  $\gamma$  можно задавать при помощи непрерывного отображения произвольного отрезка  $[a, b]$ :

$$\gamma : ([a, b], \{a, b\}) \rightarrow (X, x_0).$$

При том замкнутый путь как однопараметрическое семейство точек  $\{\gamma(t)\}$ ,  $t \in [a, b]$  будем считать не зависимым от как выбора ориентированного параметра  $t \in [a, b]$ , так и от выбора самого отрезка  $[a, b]$ . Другими словами два замкнутых пути

$$\gamma_1 : ([a_1, b_1], \{a_1, b_1\}) \rightarrow (X, x_0), \quad \gamma_2 : ([a_2, b_2], \{a_2, b_2\}) \rightarrow (X, x_0)$$

будем считать эквивалентными (т.е. не будем их различать), если один параметр можно заменить на другой, т.е. имеется гомеоморфизм, сохраняющий начала и, соответственно, концы отрезков

$$\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2], \quad \varphi(a_1) = a_2, \quad \varphi(b_1) = b_2,$$

для которого выполнено тождество

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), \quad t \in [a_1, b_1].$$

Множество классов попарно гомотопных или эквивалентных замкнутых пунктированных путей в пунктированном пространстве  $(X, x_0)$  будет обозначаться через  $\pi_1(X, x_0)$ . Заметим, что эквивалентные пути, получающиеся друг из друга путем замены параметра на одном и том же отрезке  $[a, b]$  очевидным образом гомотопны, поскольку любой гомеоморфизм  $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , сохраняющий начало и, соответственно, конец отрезка, гомотопен тождественному отображению.

Во множестве  $\pi_1(X, x_0)$  классов гомотопных путей естественным образом задается операция  $\gamma_1 * \gamma_2 \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x_0)$ ,

$$* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

называемая *операцией композиции или умножения*. Операция композиции задается следующим образом. Рассмотрим два класса замкнутых путей  $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x_0)$ . Без ограничения общности будем считать, что у замкнутого пути  $\gamma_1$  параметр пробегает отрезок  $[a, b]$ , а у замкнутого пути  $\gamma_2$  параметр пробегает отрезок  $[b, c]$ . Рассмотрим отрезок  $[a, c]$  равный объединению двух отрезков

$$[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$$

с единственной общей точкой  $b$ . Зададим отображение

$$\gamma_3 : [a, c] \rightarrow X$$

формулой:

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b], \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Это определение корректно определяет непрерывное отображение  $\gamma_3$ , поскольку в единственной общей точке  $b$  значения отображений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  совпадают:

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = x_0.$$

Так построенное отображение будем обозначать через  $\gamma_3 = \gamma_1 * \gamma_2$  и называть *композицией замкнутых путей композиция замкнутых путей*. Если параметр  $t$  представлять как время, а сам путь как движение точки в пространстве  $X$ , то композиция представляет собой последовательное прохождение точки по двум путям, сначала по первому пути, а потом по второму пути.

**Теорема 10** *Определение композиции \* замкнутых путей корректно переносится на их гомотопические классы, т.е. на множество  $\pi_1(X, x_0)$ . Другими словами, если путь  $\gamma_1$  гомотопен пути  $\gamma'_1$ , а путь  $\gamma_2$  гомотопен пути  $\gamma'_2$ , то композиции тоже гомотопны:*

$$\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma'_1 * \gamma'_2.$$

**Теорема 11** Множество  $\pi_1(X, x_0)$ , оснащенное операцией  $*$  является группой.

Группа  $\pi_1(X, x_0)$  (в предположении операции  $*$ ) называется *фундаментальной группой* пунктированного пространства  $(X, x_0)$

**Теорема 12** Непрерывное отображение пунктированных пространств

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

при помощи композиции отображений порождает гомоморфизм фундаментальных групп

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

**Теорема 13** Два гомотопных непрерывных отображения пунктированных пространств

$$f \sim g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

порождают один и тот же гомоморфизм фундаментальных групп

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

**Теорема 14** Для двух непрерывных отображений пунктированных пространств

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0), \quad g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$$

композиция непрерывных отображений переходит в композицию гомоморфизмов фундаментальных групп:

$$g_* \cdot f_* = (g \cdot f)_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

**Следствие 1** Если пунктированные пространства  $(X, x_0)$  и  $(Y, y_0)$  гомотопически эквивалентны, то их фундаментальные группы изоморфны

$$\pi_1(X, x_0) \approx \pi_1(Y, y_0).$$

## Другое определение фундаментальной группы

Всякий замкнутый пунктированный путь

$$\gamma : ([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (X, x_0).$$

пунктированного пространства можно однозначно представить в виде композиции

$$\begin{array}{ccc} ([0, 1], \{0, 1\}) & \xrightarrow{\gamma} & (X, x_0), \\ & \searrow p & \nearrow \tilde{\gamma} \\ & (\mathbf{S}^1, s_0) & \end{array}$$

причем соответствие  $\gamma \Rightarrow \tilde{\gamma}$  является взаимно однозначным между замкнутыми пунктированными путями и пунктированными отображениями окружности, согласованным с гомотопиями пунктированных пространств.

**Теорема 15** *Отображение  $f : (\mathbf{S}^1, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$  реализует нейтральный элемент группы  $\pi_1(X, x_0)$  тогда и только тогда, когда отображение  $f$  продолжается до непрерывного отображения двумерного диска  $(\mathbf{D}^2, s_0)$ , у которого окружность  $(\mathbf{S}^1, s_0)$  является границей.*