"Введение в топологию", конспект лекции 8.

А.С.Мищенко

5 ноября 2012 г.

План

Гомотопии. $\pi(X, Y)$, функториальность.
Что такое категория. Примеры категорий, функтор, гомотопический функтор. Категория гомотопических типов.
Пунктированные пространства. Категория пунктированных пространств. Морфизмы пунктированных пространств.
Пары топологических пространств. Тройки, n–ады.
Ретракция. Ретракт, деформационная ретракция, деформационный ретракт. Стягиваемость. Окрестностный ретракт.
Пара Борсука. (Постников, стр.83; Клеточные пространства.стр.15)
Фундаментальная группа. $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Перемена отмеченной точки.

Гомотопия.

Рассмотрим два топологических пространства X и Y и два непрерывных отображения

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y.$$

Будем говорить, что отображения f_0, f_1 *гомотопны* и писать $f_0 \sim f_1$, если существует непрерывное отображение F декартового произведения $X \times I$ пространства X на единичный отрезок вещественных чисел $I = [0, 1]$,

$$F : X \times I \longrightarrow Y,$$

для которого выполнены тождества

$$F(x, 0) \equiv f_0(x), \quad F(x, 1) \equiv f_1(x), \quad x \in X.$$

Отображение F называется *гомотопией* между отображениями f_0 и f_1, а промежуточные отображения $f_t(x) = F(x, t)$ называются *деформацией* , соединяющей отображения f_0 и f_1 .

Заметим, что единичный отрезок I в определении гомотопии можно заменить на произвольный отрезок вещественных чисел, поскольку все отрезки вещественных чисел вида $[a,b]$ гомеоморфны между собой, а в качестве гомеоморфизма между ними можно выбрать линейное отображение. На пример, гомеоморфизм

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$$

можно задать формулой

$$\varphi(t) = a + t(b-a), \quad t \in [0,1].$$

Из этого замечания следует, что отношение гомотопности между отображениями является отношением эквивалентности, т.е. выполнены естественный свойства отношения эквивалентности:

- $f \sim f$;
- из $f \sim g$ следует $g \sim f$;
- если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.

Провести доказательное рассуждение!!

Определение 1 $\pi(X,Y)$

Теорема 1 *Пусть заданы непрерывные отображения*

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y, \quad g_0, g_1 : Y \longrightarrow Z.$$

Если гомотопны отображения f_0 и f_1, а также гомотопны отображения g_0 и g_1, то соответствующие композиции $h_0 = g_0 \cdot f_0$ и $h_1 = g_1 \cdot f_1$ тоже гомотопны.

Доказательство. Провести доказательное рассуждение!!

Теорема 2 *Функториальность:*

$$\pi(X,Y) \times \pi(Y,Z) \longrightarrow \pi(X,Z)$$

Определение 2 *Категория гомотопических типов*

Теорема 3 *Непрерывные отображения $f, g : X \longrightarrow Y \times Z$ гомотопны тогда и только тогда, когда обе проекции на сомножители, т.е. композиции $pr_X \cdot f$, $pr_X \cdot g$ и $pr_Y \cdot f$, $pr_Y \cdot g$, соответственно, гомотопны.*

Теорема 4 *Иначе: Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\pi(Z, X \times Y) \arrow[rr, "pr_X"] \arrow[d, "pr_Y"] \arrow[drr, "\approx"] & & \pi(Z,X) \\
\pi(Z,Y) & & \pi(Z,X) \times \pi(Z,Y) \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Таким образом, семейство всех непрерывных отображений $\{f : X \longrightarrow Y\}$ разбивается на классы попарно гомотопных непрерывных отображений. Категория топологических пространств и непрерывных отображений $\mathcal{TOP}$ тем самым редуцируется до категории $\mathcal{HT}$ так называемых *гомотопических типов*: объектами служат топологические пространства, а морфизмами — классы попарно гомотопных непрерывных отображений.

По аналогии с понятием гомеоморфизма в категории $\mathcal{TOP}$ топологических пространств, в категории $\mathcal{HT}$ гомотопических типов вводится понятие *гомотопической эквивалентности* топологических пространств . Напомним (см. **??**), что под гомеоморфизмом мы понимаем обратимое непрерывное отображение, т.е. такое взаимно однозначное непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$ пространства X на пространство Y, у которого обратное отображение $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ тоже непрерывно. Другими словами, к отображению f имеется другое отображение $g : Y \longrightarrow X$, причем две возможные композиции f и g являются тождественными отображениями, т.е.

$$f \cdot g = \mathbf{Id}_Y, \quad g \cdot f = \mathbf{Id}_X.$$

Определение 3 *Под гомотопической эквивалентностью между топологическими пространствами X и Y понимается такое непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$, для которого имеется другое непрерывное отображение $g : Y \longrightarrow X$, такое что две возможные композиции f и g гомотопны тождественными отображениям, т.е.*

$$f \cdot g \sim \mathbf{Id}_Y, \quad g \cdot f \sim \mathbf{Id}_X,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\cdot f \sim \mathbf{Id}_X"] & Y \arrow[r, "g=f^{-1}"'] \arrow[rr, bend left, "f\cdot g \sim \mathbf{Id}_Y"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} .$$

В этом случае сами топологические пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными

Примеры

Привести доказательства!!

1. Гомеоморфные топологические пространства гомотопически эквивалентны.

2. Эвклидово пространство $\mathbf{R}^n$ гомотопически эквивалентно одноточечному пространству $\{x_0\}$ (которое можно отождествить с $\mathbf{R}^0$).

3. Замкнутый диск $D^n \subset \mathbf{R}^b$, $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2 \le 1$ гомотопически эквивалентен одноточечному пространству.

4. Открытый диск $\overset{\circ}{D^n} \subset \mathbf{R}^b$, $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2 < 1$ гомотопически эквивалентен одноточечному пространству.

Стягиваемость пространства к своему подпространству

Определение 4 *Ретракция, ретракт, деформационный ретракт, деформационная ретракция.*

Теорема 5 *Ретракция* $X \xrightarrow{f} A \subset X$ *это такое отображение* $f : X \longrightarrow X$, *что* $f \cdot f = f$. *Здесь* A *— множество неподвижных точек отображения* f.

Теорема 6 *Примеры ретрактов, которые не являются деформационными ретрактами*

Теорема 7 *Примеры: Лист Мебиуса, цилиндр — деформационные ретракции на экватор*

Теорема 8 *Конструкция Бинга — дом с двумя комнатами, у которого стенки образуют стягиваемое пространство.*

Теорема 9 *Основание цилиндра отображения является его деформационным ретрактом.*

1 Фундаментальная группа, накрытия, теорема Ван-Кампена.

Пары топологических пространств. Пунктированные пространства

Парой топологических пространств (X, A) называется топологическое пространство X и его замкнутое подпространство $A \subset X$. Отображением пар $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ называется такое отображение $f : X \longrightarrow Y$, для которого выполнено условие $f(A) \subset B$. Ограничение $f_0 = f\,|_A : A \longrightarrow B$ формирует тогда коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\subset} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{\subset} & Y \end{array} \tag{1}$$

Поэтому часто также пишут, что отображение пар это пара отображений (f, f_0) , для которой диаграмма (1) коммутативна.

Если в паре (X, A) подмножество A состоит из одной точки x_0 , то тогда пространство X называется *пунктированным* пространством или *пространством с отмеченной точкой* x_0 . При этом отображения пунктированных пространств должны переводит отмеченную точку в отмеченную точку. Такие отображения будем называть *пунктированными отображениями.*

Гомотопия пар

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

— это такая гомотопия, которая при каждом значении параметра $t \in I$ отображает подмножество A в B , т.е. F есть отображение пары $(X \times I, A \times I)$ в пару (Y, I) . В случае пунктированных пространств гомотопия при каждом значении параметра $t \in I$ переводит отмеченную точку $x_0 \in X$ в отмеченную точку $y_0 \in Y$.

Все выше сказанное позволяет определить категорию $\mathcal{HT}_0$ пунктированных гомотопических типов как категорию пунктированных топологических пространств, морфизмы которых являются классами попарно гомотопных пунктированных отображений.

Фундаментальная группа

Рассмотрим *замкнутый (ориентированный) пунктированный путь* в пунктированном пространстве как непрерывное отображение единичного отрезка I действительных чисел в пространство X ,

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X,$$

которое начинается и кончается в отмеченной точке $x_0 \in X$, т.е.

$$\gamma(0) = \gamma(0) = x_0.$$

Другими словами, отображение γ является отображением пар

$$\gamma : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (X, x_0).$$

Как и в случае гомотопий отображений заметим, что замкнутый путь γ можно задавать при помощи непрерывного отображения произвольного отрезка $[a, b]$:

$$\gamma : ([a,b], \{a,b\}) \longrightarrow (X, x_0).$$

При том замкнутый путь как однопараметрическое семейство точек $\{\gamma(t)\}, \quad t \in [a, b]$ будем считать не зависимым от как выбора ориентированного параметра $t \in [a, b]$, так и от выбора самого отрезка $[a, b]$. Другими словами два замкнутых пути

$$\gamma_1 : ([a_1,b_1], \{a_1,b_1\}) \longrightarrow (X, x_0), \quad \gamma_2 : ([a_2,b_2], \{a_2,b_2\}) \longrightarrow (X, x_0)$$

будем считать эквивалентными (т.е. не будем их различать), если один параметр можно заменить на другой, т.е.имеется гомеоморфизм, сохраняющий начала и, соответственно, концы отрезков

$$\varphi : [a_1,b_1] \longrightarrow [a_2,b_2], \quad \varphi(a_1) = a_2, \quad \varphi(b_1) = b_2,$$

для которого выполнено тождество

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), \quad t \in [a_1,b_1].$$

Множество классов попарно гомотопных или эквивалентных замкнутых пунктированных путей в пунктированном пространстве (X, x_0) будет обозначаться через $\pi_1(X, x_0)$. Заметим, что эквивалентные пути, получающиеся друг из друга путем замены параметра на одном и том же отрезке $[a, b]$ очевидным образом гомотопны, поскольку любой гомеоморфизм $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, сохраняющий начало и, соответственно, конец отрезка, гомотопен тождественному отображению.

Во множестве $\pi_1(X, x_0)$ классов гомотопных путей естественным образом задается операция $\gamma_1 * \gamma_2 \in \pi(X, x_0)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x_0)$,

$$* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0),$$

называемая *операцией композиции или умножения.* Операция композиции задается следующим образом. Рассмотрим два класса замкнутых путей $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, x_0)$, . Без ограничения общности будем считать, что у замкнутого пути γ_1 параметр пробегает отрезок $[a, b]$, а у замкнутого пути γ_2 параметр пробегает отрезок $[b, c]$. Рассмотрим отрезок $[a, c]$ равный объединению двух отрезков

$$[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$$

с единственной общей точкой b. Зададим отображение

$$\gamma_3 : [a, c] \longrightarrow X$$

формулой:

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b], \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Это определение корректно определяет непрерывное отображение γ_3, поскольку в единственной общей точке b значения отображений γ_1 и γ_2 совпадают:

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = x_0.$$

Так построенное отображение будем обозначать через $\gamma_3 = \gamma_1 * \gamma_2$ и называть *композицией* замкнутых путей *композиция замкнутых путей.* Если параметр t представлять как время, а сам путь как движение точки в пространстве X, то композиция представляет собой последовательное прохождение точки по двум путям, сначала по первому пути, а потом по второму пути.

Теорема 10 *Определение композиции $*$ замкнутых путей корректно переносится на их гомотопические классы, т.е. на множество $\pi_1(X, x_0)$. Другими словами, если путь γ_1 гомотопен пути γ_1', а путь γ_2 гомотопен пути γ_2', то композиции тоже гомотопны:*

$$\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_1' * \gamma_2'.$$

Теорема 11 *Множество* $\pi_1(X, x_0)$, *оснащенное операцией* $*$ *является группой.*

Группа $\pi_1(X, x_0)$ (в предположении операции $*$) называется *фундаментальной группой* пунктированного пространства (X, x_0)

Теорема 12 *Непрерывное отображение пунктированных пространств*

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

при помощи композиции отображений порождает гомоморфизм фундаментальных групп

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Теорема 13 *Два гомотопных непрерывных отображения пунктированных пространств*

$$f \sim g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

порождают один и тот же гомоморфизм фундаментальных групп

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Теорема 14 *Для двух непрерывных отображений пунктированных пространств*

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0), \quad g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$$

композиция непрерывных отображений переходит в композицию гомоморфизмов фундаментальных групп:

$$g_* \cdot f_* = (g \cdot f)_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

Следствие 1 *Если пунктированные пространства* (X, x_0) *и* (Y, y_0) *гомотопически эквивалентны, то их фундаментальные группы изоморфны*

$$\pi_1(X, x_0) \approx \pi_1(Y, y_0).$$

Другое определение фундаментальной группы

Всякий замкнутый пунктированный путь

$$\gamma : ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (X, x_0).$$

пунктированного пространства можно однозначно представить в виде композиции

$$\begin{tikzcd} ([0,1], \{0,1\}) \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "p"'] & & (X, x_0), \\ & (\mathbf{S}^1, s_0) \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

причем соответствие $\gamma \Rightarrow \widetilde{\gamma}$ является взаимно однозначным между замкнутыми пунктированными путями и пунктированными отображениями окружности, согласованным с гомотопиями пунктированных пространств.

Теорема 15 *Отображение $f : (\mathbf{S}^1, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$ реализует нейтральный элемент группы $\pi_1(X, x_0)$ тогда и только тогда, когда отображение f продолжается до непрерывного отображения двумерного диска $(\mathbf{D}^2, s_0)$, у которого окружность $(\mathbf{S}^1, s_0)$ является границей.*

Теорема Ван-Кампена

Теорема 16 (Ван-Кампен) *Фундаментальная группа букета $(X \vee Y, x_0 \vee y_0)$ двух пунктированных локально линейно связных локально односвязных пространств пространств (X, x_0) и (Y, y_0) изоморфна свободному произведению фундаментальных групп слагаемых:*

$$\pi_1(X \vee Y, x_0 \vee y_0) \approx \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Доказательство. Имеются гомоморфизмы

$$i_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X \vee Y, x_0 \vee y_0),$$

$$j_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \vee Y, x_0 \vee y_0),$$

порождаемые вложениями

$$i : (X, x_0) \longrightarrow (X \vee Y, x_0 \vee y_0),$$

$$j : (Y, y_0) \longrightarrow (X \vee Y, x_0 \vee y_0),$$

Значит, существует гомоморфизм

$$i_* \vee j_* : \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \vee Y, x_0 \vee y_0).$$

Эпиморфизм: Пусть $f : ([0;1], \{0,1\}) \longrightarrow (X \vee Y, x_0 \vee y_0)$ отображение, реализующее некоторый элемент в группе $\pi_1(X \vee Y, x_0 \vee y_0)$. Покрываем пространство $X \vee Y$ тремя открытыми множествами: $U_l = X \setminus \{x_0\}$, $U_r = Y \setminus \{y_0\}$, и $U_0 \subset X \vee Y$ — связная и односвязная окрестность точки $x_0 \vee y_0$. Прообразы всех трех множеств $f^{-1}(U_l)$, $f^{-1}(U_{lr})$, $f^{-1}(U_0)$, распадаются в несвязные объединения интервалов (и двух полуинтервалов). Они покрывают весь отрезок $[0,1]$. Значит, существует конечное семейство таких интервалов, скажем, $\mathfrak{L} = \{(\alpha_i^l, \beta_i^l)\}$, $\mathfrak{R} = \{(\alpha_i^r, \beta_i^r)\}$, $\mathfrak{O} = \{(\alpha_i^0, \beta_i^0)\}$.

Интервалы из $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$ можно пронумеровать слева направо таким образом, чтобы $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} = \{(x_i, y_i)\}$, $y_i \le x_{i+1}$. Без ограничения общности можно считать, что в случае, когда $y_i = x_{i+1}$ эта точка отображается в отмеченную точку. В случае же, когда $y_i < x_{i+1}$, отрезок $[y_i, x_{i+1}]$ отображается в окрестность U_0.

Поскольку окрестность линейно связна и односвязна, то любая точка $z \in U_0$ соединяется с начальной точкой $x_0 \vee y_0$ кривой γ_z, единственной с точностью до гомотопии, неподвижной на концах. Тогда кривая f гомотопна кривой f', которая распадается в композицию кривых

$$f' = (f_{[x_1,y_1]} * \gamma^{-1}_{f(y_1)}) * (\gamma_{f(y_1)} * f_{[y_1,x_2]} * \gamma^{-1}_{f(x_2)}) * (\gamma_{f(x_2)} * f_{[x_2,y_2]} * \gamma^{-1}_{f(y_2)}) * \cdots$$

$$\cdots * (\gamma_{f(y_k)} * f_{[y_k,x_{k+1}]} * \gamma^{-1}_{f(x_{k+1})}) * (\gamma_{f(x_{k+1})} * f_{[x_{k+1},y_{k+1}]} * \gamma^{-1}_{f(y_{k+1})}) * \cdots$$

$$\cdots * (\gamma_{f(y_{N-1})} * f_{[y_{N-1},x_N]} * \gamma^{-1}_{f(x_N)}) * (\gamma_{f(x_N)} * f_{[x_N,y_N]}).$$

Каждый из сомножителей задает либо элемент в группе $\pi_1(X, x_0)$, либо в группе $\pi_1(Y, y_0)$, либо нейтральный элемент, т.е. композиция представляет элемент в свободном произведении $\pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$.

Мономорфизм: Если слово $a_1 b_1 a_2 b_2 \cdot a_n b_n$ дает нейтральный элемент, то существует отображение квадрата I^2, как показано на картинке. Красным отмечен прообраз X, синим отмечен прообраз Y, а желтым – прообраз отмеченной точки. Дальше нужно применять теорему Жордана, которая была студентам доказана в курсе наглядной геометрии на первом курсе: Весь квадрат разбивается на конечное число овалов. Самый внутренний дает тривиальность, скажем, b_1. и т.д.

Пара Борсука и прочее

Теорема 17 *If $(X; A)$ is a CW pair consisting of a CW complex X and a contractible subcomplex A, then the quotient map $X \longrightarrow X/A$ ([1]), p.11 is a homotopy equivalence.*

([1]), p.11

Список литературы

[1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2000.