Задачи для экзаменационных билетов

17 декабря 2012 г.

1. Доказать, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то и множества A иB равномощны.
2. Доказать, что всякое подмножество счетного множества является счетным множеством.
3. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.
4. Доказать, что если и — счетные множества, то их объединение $A \cup$ — счетное множество.
5. Доказать, что объединение счетного семейства счетных множеств есть множество счетное.
6. Показать, что множество вещественных чисел несчетно.
7. Показать, что на бесконечном полуинтервале $X = (0, +\infty)$ семейство подмножеств $\{\emptyset, (a, +\infty), 0 \leq a < +\infty\}$ образует некоторую топологию.
8. Показать что множество $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто на вещественной прямой $\mathbf{R}$.
9. Показать, что если множество U открыто, а множество F замкнуто, то $U \setminus F$ открыто, а $F \setminus U$ замкнуто.
10. Приведите пример пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются).
11. Верно ли, что объединение плотных подмножеств плотно?

    Верно ли, что пересечение плотных подмножеств плотно?
12. Покажите, что пересечение двух (конечного семейства) плотных открытых подмножеств плотно.

13. Пусть $C[0,1]$ – пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Доказать, что функция

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$$

задает метрику на пространстве $C[0,1]$.

14. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$ тоже является метрикой.

15. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ тоже является метрикой.

16. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

17. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1\}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

18. Докажите, что следующая функция в $\mathbb{R}^n$ есть метрика:

$$\rho(x,y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

19. Докажите, что следующая функция в $\mathbb{R}^n$ есть метрика:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

20. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

является непрерывным.

21. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения, причем $0 \notin g(X)$. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

является непрерывным.

22. Пусть $GL(n;\mathbb{R}) \subset \mathbf{Mat}\ (p \times n, \mathbb{R})$ — пространство обратимых матриц. Показать, что отображение $f : GL(n;\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n;\mathbb{R}), \quad f(A) = A^{-1}$ является непрерывным.

23. Привести пример последовательности непрерывных функций $f_i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N}$, для которой функция $f(x) = \mathsf{sup}\,\{f_i(x) : i \in \mathbf{N}\}$ не является непрерывной.

24. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества на отрезок $[0, 1]$.

25. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества K на его квадрат $K \times K$.

26. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}^2$, у которого образ $f(\mathbf{I}) \subset \mathbf{I}^2$ всюду плотен, является сюръекцией.

27. Привести пример двух гомеоморфных пространств X и Y и биекции $f : X \longrightarrow Y$, которая не является гомеоморфизмом.

28. Пусть $\mathbf{S}^1$ – окружность и $s_0 \in \mathbf{S}^1$ –точка на окружности. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^1 \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

29. Пусть $\mathbf{S}^n$ – n–мерная сфера и $s_0 \in \mathbf{S}^n$ –точка на сфере. Доказать, что пространство $\mathbf{S}^n \setminus \{s_0\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

30. Докажите, что вся плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна открытой полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

31. Докажите, что замкнутый круг $\mathbf{D}^2$ гомеоморфен квадрату $\mathbf{I}^2$.

32. Докажите, что полуплоскость $\{x \geq 0\}$ гомеоморфна квадранту $\{x, y \geq 0\}$.

33. Докажите, что плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ гомеоморфна плоскости без круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$.

34. Показать, что подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, A замкнуто и ограничено.

35. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f, такая, что $K = f^{-1}(0)$.

36. Связно ли пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)?

    Связно ли пространство иррациональных чисел (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$)?

37. Докажите, что если пространство снабжено структурой группы и умножение на любой элемент группы является непрерывным отображением, то связная компонента единицы является нормальной подгруппой.

38. Связны ли следующие подмножества плоскости:

    1) составленное из точек, у которых обе координаты рациональны;

    2) составленное из точек, у которых хотя бы одна из координат рациональна;

    3) составленное из точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе — иррациональны?

39. Показать, что компоненты связности замкнуты.

40. Показать, что если у каждой точки пространства X имеется связная окрестность, то каждая его компонента связности открыта.

41. Докажите, что если множества A и B оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то A и B тоже линейно связны.

42. Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

43. Докажите, что для любого топологического пространства X множество $\pi(X, \mathbb{I})$ состоит из одного элемента.

44. Докажите, что число элементов множества $\pi(\mathbb{I}, Y)$ совпадает с числом компонент линейной связности пространства Y.

45. Показать, что любые два непрерывных отображения $f, g : \longrightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопны.

46. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ непрерывное отображение, являющееся гомотопической эквивалентностью. Доказать, что два отображения $g_0, g_1 : Z \longrightarrow X$ гомотопны тогда и только тогда, когда гомотопны композиции

    $$f \cdot g_0, f \cdot g_1 : Z \longrightarrow Y.$$

47. Показать, что два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ гомотопны.

48. Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

49. Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в сферу $\mathbb{S}^n$ гомотопно постоянному отображению.

50. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в сферу радиуса 1 удовлетворяют неравенству

    $$|f(x) - g(x)) < 2.$$

    Доказать, что отображения f и g гомотопны.

51. Пусть отображения $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n \subset \{0\}$ удовлетворяют неравенству

$$|f(x) - g(x)) < |f(x)|.$$

Доказать, что отображения f и g гомотопны.

52. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ и двоеточие на ней $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$. Доказать, что фактор пространство $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0$ и букет $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ гомотопически эквивалентны.

53. Показать, что если у тора стянуть в точку конечное число меридиан, то получится букет некоторого числа сфер и окружности.

54. Построить деформационную ретракцию тора с выколотой точкой на букет меридиана и параллели.

55. Построить деформационную ретракцию $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$.

56. Показать, что у стягиваемого пространства ретракт тоже стягиваемый. Но если ретракт есть стягиваемое пространство, но само пространство не обязано быть стягиваемым.